

Goran S. Savić

Milan M. Ponjavić

Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektronike

- ZA STUDENTE ODSEKA ZA SOFTVERSKO INŽENJERSTVO -

I izdanje

**Univerzitet u Beogradu, Elektrotehnički fakultet
Beograd, 2022.**

Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektronike - za studente Odseka za softversko inženjerstvo

Autori: dr Goran S. Savić, dr Milan. M. Ponjavić

Recenzenti:

dr Radivoje M. Đurić

dr Nenad S. Jovičić

Nastavno-naučno veće Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu odobrilo je objavljivanje ove nastavne literature odlukom broj 648/4 od 24.06.2022. godine.

Izdavač: Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

ISBN 978-86-7225-084-8

Predgovor

“Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektronike - za studente Odseka za softversko inženjerstvo” je prevashodno namenjena studentima koji pohađaju nastavu iz predmeta Osnovi elektronike na prvoj godini Osnovnih akademskih studija na Odseku za Softversko inženjerstvo Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Zbirka predstavlja kolekciju detaljno rešenih ispitnih zadataka iz oblasti električnih kola stalnih struja i oblasti električnih kola prostoperiodičnih struja, koje su autori kreirali i zadavali na ispitima iz pomenutog predmeta. Rešenja zadataka su prezentovana detaljno i koncipirana na način da se mogu koristiti čak i u početnim fazama savladavanja gradiva iz oblasti koje zbirka pokriva.

Sadržaj zbirke je podeljen u dva poglavlja: Električna kola stalnih struja i Električna kola prostoperiodičnih struja.

U Beogradu, 10. maj 2022.

Autori

Sadržaj

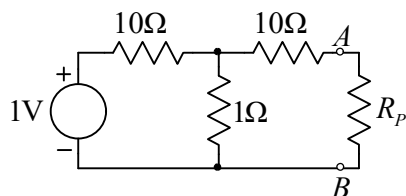
1. Električna kola stalnih struja.....	4
2. Električna kola prostoperiodičnih struja.....	238

Glava 1

ELEKTRIČNA KOLA STALNIH STRUJA

1. Električna kola stalnih struja

1.1. Za kolo sa slike 1.1 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B . Odrediti zatim i snagu koja se razvija na otporniku $R_p = 100\Omega$.

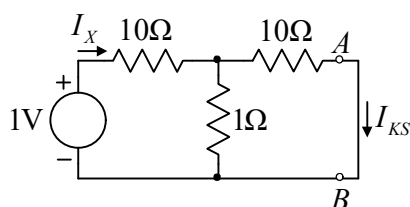


Slika 1.1

Rešenje:

Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.1a na način:

$$I_N = I_{KS}.$$



Slika 1.1a

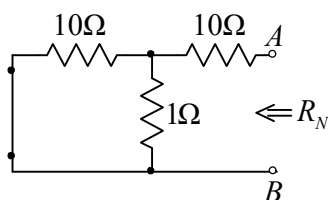
Struja I_X se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator napona 1V:

$$I_X = \frac{1V}{10\Omega + (1\Omega \parallel 10\Omega)} = \frac{1V}{10\Omega + \frac{1\Omega \cdot 10\Omega}{1\Omega + 10\Omega}} = 91.67\text{mA},$$

a na osnovu struje I_X se može odrediti struja kratkog spoja I_{KS} (a time i struja Nortonovog generatora), primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_N = I_{KS} = \frac{1\Omega}{1\Omega + 10\Omega} \cdot I_X = 8.33\text{mA}.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.1b:

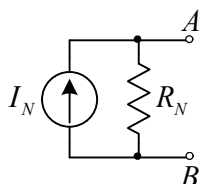


Slika 1.1b

1. Električna kola stalnih struja

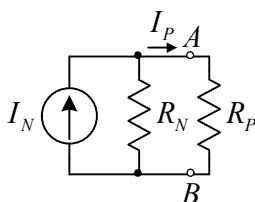
$$R_N = 10\Omega + (1\Omega \parallel 10\Omega) = 10\Omega + \frac{1\Omega \cdot 10\Omega}{1\Omega + 10\Omega} = 10.91\Omega .$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.1a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.1c:



Slika 1.1c

Ekvivalentna šema kola sa slike 1.1, koja se dobija zamenom dela kola levo od tačaka A i B Nortonovim generatorom, je prikazana na slici 1.1d:



Slika 1.1d

Struja I_P se može odrediti primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_P = \frac{R_N}{R_N + R_P} \cdot I_N = 819.7\mu\text{A} .$$

Konačno, snaga koja se razvija (disipira) na otporniku R_P se može izračunati na sledeći način:

$$P_{R_P} = I_P^2 \cdot R_P = 67.19\mu\text{W} .$$

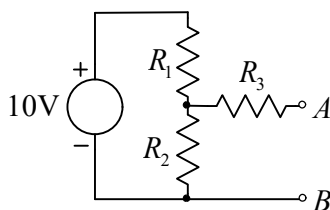
1.2. Za kolo sa slike 1.2 je poznato: $R_1 = 9\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\text{k}\Omega$ i $R_3 = 1.1\text{k}\Omega$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .

b) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B .

c) Ako se između tačaka A i B poveže otpornik otpornosti R_P , kolika treba da bude otpornost R_P da bi se na njoj razvijala maksimalna moguća snaga? Kolika je ta maksimalna moguća snaga?

1. Električna kola stalnih struja

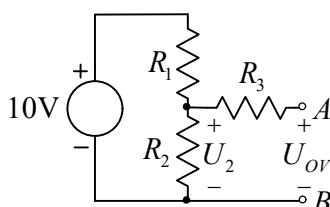


Slika 1.2

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B . S obzirom da na desnom kraju otpornika R_3 postoji prekid, kroz granu sa tim otpornikom neće proticati struja, tako da će i napon na tom otporniku biti jednak nuli. Stoga, na osnovu šeme sa slike 1.2a se može pisati:

$$U_T = U_{ov} = U_2.$$

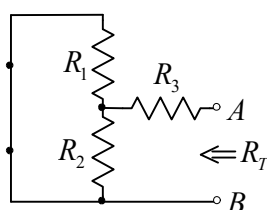


Slika 1.2a

Napon U_2 je najlakše odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_T = U_{ov} = U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot 10V = 1V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.2b:

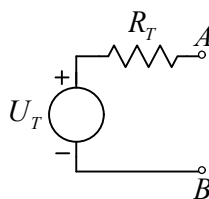


Slika 1.2b

$$R_T = R_3 + (R_1 \parallel R_2) = 2k\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.2a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.2c:

1. Električna kola stalnih struja

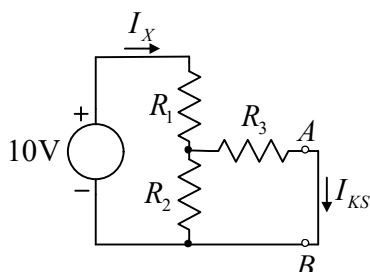


Slika 1.2c

b) Struja Nortonovog generatora I_N između tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B (nakon što se te dve tačke kratko spoje):

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.2d.



Slika 1.2d

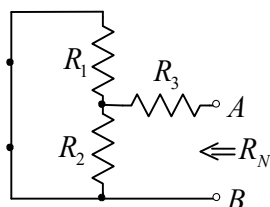
Struja I_X se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator napona 10V:

$$I_X = \frac{10V}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} = 1.05\text{mA},$$

a na osnovu struje I_X se može odrediti struja kratkog spoja I_{KS} (a time i struja Nortonovog generatora), primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_N = I_{KS} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot I_X = 0.5\text{mA}.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.2e:

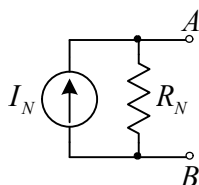


Slika 1.2e

1. Električna kola stalnih struja

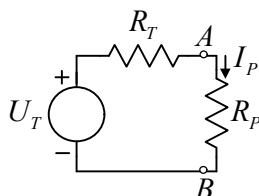
$$R_N = R_3 + (R_1 \parallel R_2) = 2\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.2d), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.2f:



Slika 1.2f

c) Ako se između tačaka A i B poveže otpornik otpornosti R_p , a deo kola levo od tačaka A i B predstavi ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, dobija se kolo prikazano na slici 1.2g.



Slika 1.2g

Snaga koja se razvija (disipira) na otporniku R_p se može izraziti na sledeći način:

$$P_{R_p} = I_p^2 \cdot R_p = \left(\frac{U_T}{R_T + R_p} \right)^2 \cdot R_p.$$

Otpornost R_p za koju je snaga P_{R_p} maksimalna se određuje iz uslova da je za tu vrednost R_p prvi izvod P_{R_p} po R_p jednak nuli:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = 0.$$

Dalje sledi:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = \frac{d}{dR_p} \left[\frac{U_T^2 \cdot R_p}{(R_T + R_p)^2} \right] = U_T^2 \cdot \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = U_T^2 \cdot \frac{R_T^2 - R_p^2}{(R_T + R_p)^4} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$R_p = R_T = 2\text{k}\Omega.$$

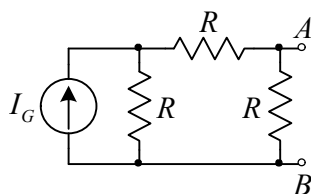
1. Električna kola stalnih struja

Maksimalna moguća snaga koja se razvija (disipira) na otporniku R_p je:

$$P_{R_p \max} = P_{R_p} (R_p = 2\text{k}\Omega) = \left(\frac{U_T}{R_T + 2\text{k}\Omega} \right)^2 \cdot 2\text{k}\Omega = 125\mu\text{W}.$$

1.3. Za kolo sa slike 1.3 je poznato: $R = 10\text{k}\Omega$ i $I_G = 1\text{mA}$.

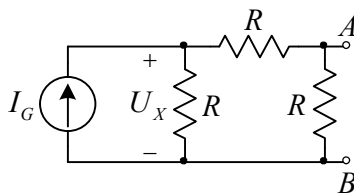
- a) Odrediti napon između tačaka A i B .
- b) Odrediti struju kratkog spoja između tačaka A i B .
- c) Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B .
- d) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .
- e) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B .



Slika 1.3

Rešenje:

a) Napon U_X (označen na slici 1.3a) se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni strujni generator I_G :



Slika 1.3a

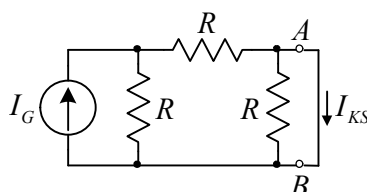
$$U_X = I_G \cdot (R \parallel (R + R)) = I_G \cdot \frac{R \cdot (R + R)}{R + (R + R)} = I_G \cdot \frac{2R^2}{3R} = \frac{2}{3} R I_G,$$

a na osnovu napona U_X se može odrediti napon između tačaka A i B , primenom formule za razdelnik napona:

$$U_{AB} = \frac{R}{R + R} \cdot U_X = \frac{1}{2} U_X = \frac{1}{3} R I_G = 3.33\text{V}.$$

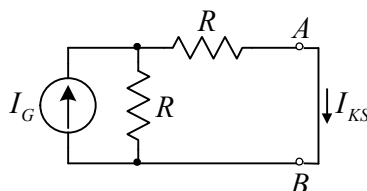
1. Električna kola stalnih struja

b) Struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B je označena na slici 1.3b.



Slika 1.3b

S obzirom da su tačke A i B kratko spojene, napon na krajnjem desnom otporniku R će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz taj otpornik neće proticati struja. Iz tog razloga se krajnji desni otpornik R može zameniti otvorenom vezom (jer kroz otvorenu vezu takođe ne protiče struja), i na taj način se dobija potpuno ekvivalentno kolo (prikazano na slici 1.3c).

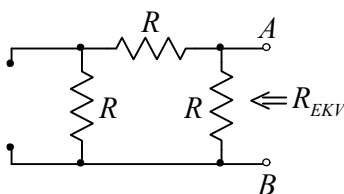


Slika 1.3c

Na osnovu ekvivalentnog kola, struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B se može odrediti primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_{KS} = \frac{R}{R + R} \cdot I_G = \frac{1}{2} I_G = 0.5 \text{ mA}.$$

c) Ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.2d:



Slika 1.2d

$$R_{EKV} = R \parallel (R + R) = R \parallel 2R = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3} R = 6.67 \text{ k}\Omega.$$

d) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B . Taj napon je izračunat pod tačkom a) ovog zadatka, tako da je:

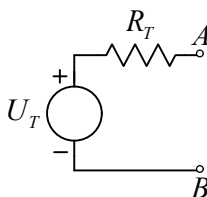
$$U_T = U_{AB} = 3.33 \text{ V}.$$

1. Električna kola stalnih struja

Otpornost Thevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao ekvivalentna otpornost između tačaka A i B . Ta ekvivalentna otpornost je izračunata pod tačkom **c)** ovog zadatka, tako da je:

$$R_T = R_{EKV} = 6.67\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} između tačaka A i B , može se zaključiti da će traženi Thevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.3e:



Slika 1.3e

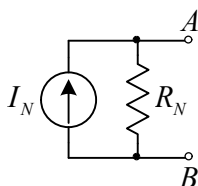
e) Struja Nortonovog generatora između tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja između tačaka A i B . Ta struja je izračunata pod tačkom **b)** ovog zadatka, tako da je:

$$I_N = I_{KS} = 0.5\text{mA}.$$

Otpornost Nortonovog generatora između tačaka A i B se određuje kao ekvivalentna otpornost između tačaka A i B . Ta ekvivalentna otpornost je izračunata pod tačkom **c)** ovog zadatka, tako da je:

$$R_N = R_{EKV} = 6.67\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.3f:



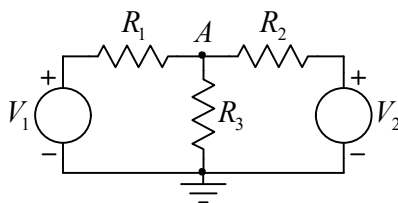
Slika 1.3f

1.4. Za kolo sa slike 1.4:

a) primenom metoda superpozicije i formule za razdelnik napona, odrediti napon u tački A , ako je poznato da je $R_1 = R_2 = R_3 = 8\text{k}\Omega$ i $V_1 = 2V_2 = 4\text{V}$;

1. Električna kola stalnih struja

b) primenom metoda superpozicije i formule za strujni razdelnik, odrediti struju kroz otpornik R_1 , ako je poznato da je $R_1 = R_2 = R_3 = 4\text{k}\Omega$ i $2V_1 = V_2 = 4\text{V}$.



Slika 1.4

Rešenje:

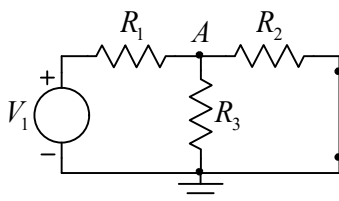
a) Napon u tački A se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente V'_A koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator V_1 , dok je idealni naponski generator V_2 anuliran, i komponente V''_A koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator V_2 , dok je idealni naponski generator V_1 anuliran:

$$V_A = V'_A + V''_A,$$

$$V'_A = V_A(V_1 \neq 0, V_2 = 0),$$

$$V''_A = V_A(V_1 = 0, V_2 \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta V'_A se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.4a (u kom je idealni naponski generator V_2 anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:

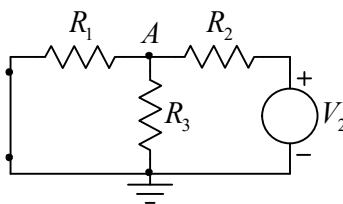


Slika 1.4a

$$V'_A = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \cdot V_1 = \frac{1}{3} V_1 = 1.33\text{V}.$$

Superpoziciona komponenta V''_A se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.4b (u kom je idealni naponski generator V_1 anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:

1. Električna kola stalnih struja



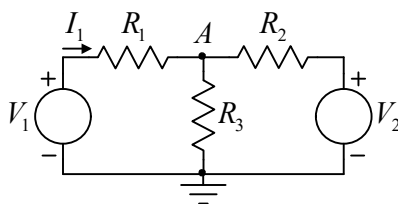
Slika 1.4b

$$V_A'' = \frac{R_1 \parallel R_3}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)} \cdot V_2 = \frac{1}{3} V_2 = 0.67 \text{ V}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$V_A = V_A' + V_A'' = 2 \text{ V}.$$

b) S obzirom da u postavci zadatka nije naveden referentni smer struje kroz otpornik R_1 koju je potrebno odrediti, taj referentni smer se može izabrati proizvoljno, i potom za taj proizvoljno izabrani referentni smer izračunati algebarska vrednost struje. Takođe, oznaka za traženu struju se može proizvoljno izabrati, s obzirom da u postavci zadatka nije navedena. Imajući to u vidu, tražena struja je označena sa I_1 , a referentni smer je usvojen kao što je to prikazano na slici 1.4c.



Slika 1.4c

Struja I_1 se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente I_1' koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator V_1 , dok je idealni naponski generator V_2 anuliran, i komponente I_1'' koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator V_2 , dok je idealni naponski generator V_1 anuliran:

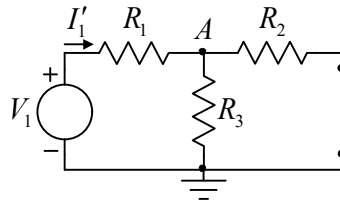
$$I_1 = I_1' + I_1'',$$

$$I_1' = I_1(V_1 \neq 0, V_2 = 0),$$

$$I_1'' = I_1(V_1 = 0, V_2 \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta I_1' se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.4d (u kom je idealni naponski generator V_2 anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator V_1 :

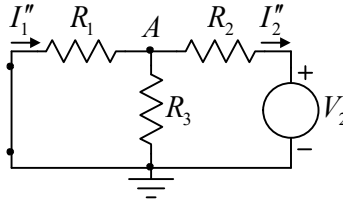
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.4d

$$I_1' = \frac{V_1}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} = 0.33 \text{mA} .$$

Struja I_2'' se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.4e (u kom je idealni naponski generator V_1 anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator V_2 :



Slika 1.4e

$$I_2'' = -\frac{V_2}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)} = -0.67 \text{mA} ,$$

a na osnovu struje I_2'' se može odrediti superpoziciona komponenta I_1'' , primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_1'' = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot I_2'' = -0.33 \text{mA} .$$

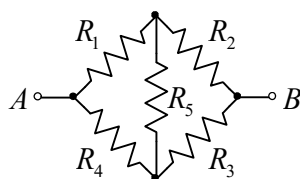
Konačno, dobija se da je:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 0 .$$

1.5. Za kolo sa slike 1.5 je poznato da je $R_1 = R_4 = 3R_2 = 3R_3 = 5R_5 = 4\text{k}\Omega$.

a) Odrediti ekvivalentnu otpornost između priključaka A i B .

b) Ako se kolo priključi na idealni naponski generator napona $U_{AB} = 10\text{V}$, odrediti struju kroz otpornik R_5 .



Slika 1.5

Rešenje:

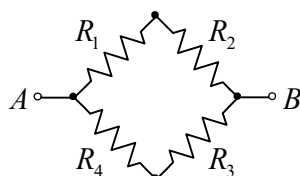
a) Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da važi:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3},$$

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između priključaka A i B , potencijal gornjeg kraja otpornika R_5 biti jednak potencijalu donjeg kraja otpornika R_5 (tj. otpornički most će biti u ravnoteži). Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za otpornik R_5) i da će struja kroz otpornik R_5 biti jednaka nuli, koliki god da je napon između priključaka A i B .

To znači da se otpornik R_5 može zameniti bilo kratkim spojem (jer je napon na njegovim krajevima jednak nuli), bilo otvorenom vezom (jer je struja kroz taj otpornik jednaka nuli), tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo.

Ukoliko se otpornik R_5 zameni otvorenom vezom, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.5a:



Slika 1.5a

Ekvivalentna otpornost između priključaka A i B se može odrediti na sledeći način:

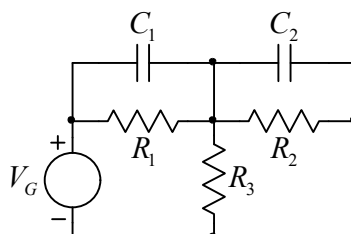
$$R_{AB} = (R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4) = 2.67 \text{ k}\Omega.$$

b) Analizom pod tačkom a) je zaključeno da je struja kroz otpornik R_5 jednaka nuli, koliki god da je napon između priključaka A i B . To znači da će struja kroz otpornik R_5 biti jednaka nuli i kada se kolo priključi na idealni naponski generator napona $U_{AB} = 10 \text{ V}$.

1.6. Za kolo sa slike 1.6 je poznato da je $R_2 = R_3 = 2R_1 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = 2C_2 = 10\text{nF}$ i $V_G = 10\text{V}$.

a) Odrediti struju kroz otpornik R_3 .

b) Odrediti količine naelektrisanja na svakom od kondenzatora.

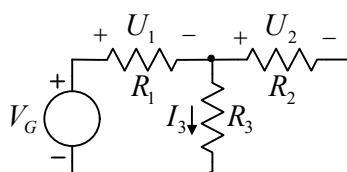


Slika 1.6

Rešenje:

a) S obzirom da u kolu postoji samo jedan generator, i to idealni naponski generator konstantnog napona, i svi ostali naponi u kolu i sve struje u kolu će biti konstantne. U kolu sa konstantnim strujama kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama, kao što je to prikazano na slici 1.6a.

Pošto u postavci zadatka nije naveden referentni smer struje kroz otpornik R_3 koju je potrebno odrediti, taj referentni smer se može izabrati proizvoljno, i potom za taj proizvoljno izabrani referentni smer izračunati algebarska vrednost struje. Takođe, oznaka za traženu struju se može proizvoljno izabrati, s obzirom da u postavci zadatka nije navedena. Imajući to u vidu, tražena struja je označena sa I_3 , a referentni smer je usvojen kao što je to prikazano na slici 1.6a.



Slika 1.6a

Napon U_2 , označen na slici 1.6a, je ne samo napon na otporniku R_2 , već i napon na otporniku R_3 , kao i napon na paralelnoj vezi otpornika R_2 i R_3 . Zbog toga se napon na otporniku R_3 može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_2 = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \cdot V_G = \frac{1}{2} V_G = 5\text{V}.$$

Tražena struja kroz otpornik R_3 se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik R_3 :

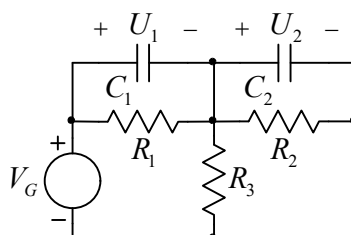
$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = 0.5\text{mA}.$$

1. Električna kola stalnih struja

b) Napon U_1 , označen na slici 1.6a, se može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \cdot V_G = \frac{1}{2} V_G = 5V.$$

S obzirom da su U_1 i U_2 takođe i naponi na kondenzatorima C_1 i C_2 , respektivno, kao što je to prikazano na slici 1.6b:



Slika 1.6b

količina naelektrisanja q_1 na kondenzatoru kapacitivnosti C_1 i količina naelektrisanja q_2 na kondenzatoru kapacitivnosti C_2 se mogu odrediti na sledeći način:

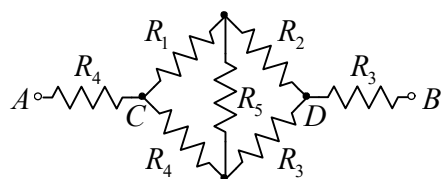
$$q_1 = C_1 \cdot U_1 = 50nC,$$

$$q_2 = C_2 \cdot U_2 = 25nC.$$

1.7. Za kolo sa slike 1.7 je poznato da je $R_1 = R_4 = 3R_2 = 3R_3 = 5R_5 = 4k\Omega$.

a) Odrediti ekvivalentnu otpornost između priključaka A i B .

b) Ako se idealni naponski generator napona $U_{AB} = 10V$ poveže između priključaka A i B , odrediti struju kroz otpornik R_5 .



Slika 1.7

Rešenje:

a) Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da važi:

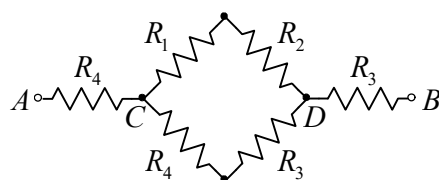
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3},$$

1. Električna kola stalnih struja

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između tačaka C i D , potencijal gornjeg kraja otpornika R_5 biti jednak potencijalu donjeg kraja otpornika R_5 (tj. otpornički most će biti u ravnoteži). Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za otpornik R_5) i da će struja kroz otpornik R_5 biti jednaka nuli, koliki god da je napon između tačaka C i D .

To znači da se otpornik R_5 može zameniti bilo kratkim spojem (jer je napon na njegovim krajevima jednak nuli), bilo otvorenom vezom (jer je struja kroz taj otpornik jednaka nuli), tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo.

Ukoliko se otpornik R_5 zameni otvorenom vezom, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.7a:



Slika 1.7a

Ekvivalentna otpornost između priključaka A i B se može odrediti na sledeći način:

$$R_{AB} = R_4 + \left((R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4) \right) + R_3 = 8\text{k}\Omega.$$

b) Analizom pod tačkom **a)** je zaključeno da je struja kroz otpornik R_5 jednaka nuli, koliki god da je napon između tačaka C i D . To znači da će struja kroz otpornik R_5 biti jednaka nuli i kada se idealni naponski generator napona $U_{AB} = 10\text{V}$ poveže između priključaka A i B .

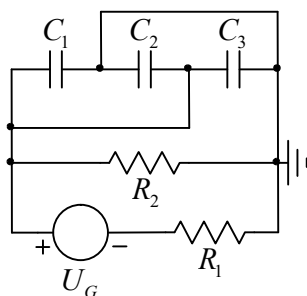
1.8. Za kolo sa slike 1.8 je poznato da je $R_1 = R_2 = 5\text{k}\Omega$, $C_1 = C_2 = C_3 = 1\mu\text{F}$ i $U_G = 60\text{V}$.

a) Odrediti struju koja protiče kroz idealni naponski generator U_G .

b) Odrediti napone na svakom od kondenzatora.

c) Odrediti količine naelektrisanja na svakom od kondenzatora.

1. Električna kola stalnih struja

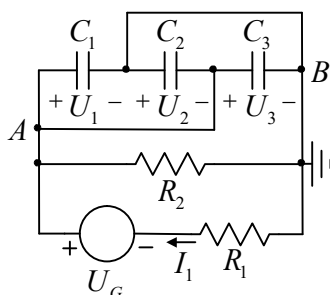


Slika 1.8

Rešenje:

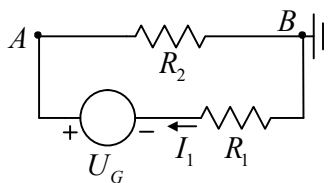
a) Pošto u postavci zadatka nije naveden referentni smer struje koja protiče kroz idealni naponski generator, a koju je potrebno odrediti, taj referentni smer se može izabrati proizvoljno, i potom za taj proizvoljno izabrani referentni smer izračunati algebarska vrednost struje. Takođe, oznaka za traženu struju se može proizvoljno izabrati, s obzirom da u postavci zadatka nije navedena. Imajući to u vidu, tražena struja je označena sa I_1 , a referentni smer je usvojen kao što je to prikazano na slici 1.8a.

Slično tome, i referentni smerovi napona na svakom od kondenzatora, kao i njihove algebarske vrednosti, su izabrani i označeni proizvoljno, na način prikazan na slici 1.8a.



Slika 1.8a

S obzirom da u kolu postoji samo jedan generator, i to idealni naponski generator konstantnog napona, i svi ostali naponi u kolu i sve struje u kolu će biti konstantne. U kolu sa konstantnim strujama kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama, kao što je to prikazano na slici 1.8b.



Slika 1.8b

1. Električna kola stalnih struja

Struja I_1 se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.8b pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator U_G :

$$I_1 = \frac{U_G}{R_1 + R_2} = 6\text{mA} .$$

b) S obzirom da desni priključak kondenzatora C_1 i levi priključak kondenzatora C_2 imaju isti potencijal kao i tačka B (jer su ti priključci kratko spojeni sa tačkom B), i s obzirom da desni priključak kondenzatora C_2 i levi priključak kondenzatora C_3 imaju isti potencijal kao i tačka A (jer su ti priključci kratko spojeni sa tačkom A), može se zaključiti da je:

$$U_1 = U_{AB} ,$$

$$U_2 = U_{BA} = -U_{AB} ,$$

$$U_3 = U_{AB} .$$

Napon U_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.8b pomoću Omovog zakona za otpornik R_2 :

$$U_{AB} = R_2 \cdot I_1 = 30\text{V} .$$

Na osnovu toga se može zaključiti da su traženi naponi na kondenzatorima:

$$U_1 = U_{AB} = 30\text{V} ,$$

$$U_2 = -U_{AB} = -30\text{V} ,$$

$$U_3 = U_{AB} = 30\text{V} .$$

c) Količina naelektrisanja q_1 na kondenzatoru kapacitivnosti C_1 , količina naelektrisanja q_2 na kondenzatoru kapacitivnosti C_2 i količina naelektrisanja q_3 na kondenzatoru kapacitivnosti C_3 se mogu odrediti na sledeći način:

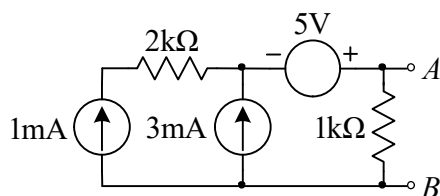
$$q_1 = C_1 \cdot U_1 = 30\mu\text{C} ,$$

$$q_2 = C_2 \cdot U_2 = -30\mu\text{C} ,$$

$$q_3 = C_3 \cdot U_3 = 30\mu\text{C} .$$

1.9. Primenom principa superpozicije odrediti napon između tačaka A i B za kolo sa slike 1.9.

1. Električna kola stalnih struja



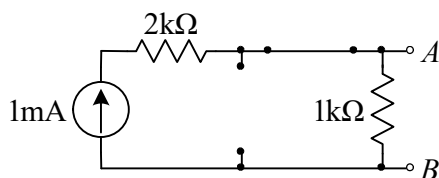
Slika 1.9

Rešenje:

Napon između tačaka A i B (U_{AB}) se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente U'_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator struje 1mA (dok su idealni strujni generator struje 3mA i idealni naponski generator napona 5V anulirani), komponente U''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator struje 3mA (dok su idealni strujni generator struje 1mA i idealni naponski generator napona 5V anulirani) i komponente U'''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator napona 5V (dok su idealni strujni generator struje 1mA i idealni strujni generator struje 3mA anulirani):

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} + U'''_{AB}.$$

Superpoziciona komponenta U'_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.9a (u kom je idealni strujni generator struje 3mA anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator napona 5V anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti $1\text{k}\Omega$:

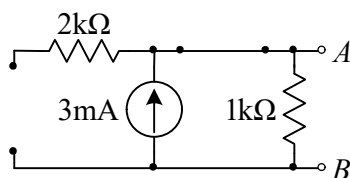


Slika 1.9a

$$U'_{AB} = 1\text{mA} \cdot 1\text{k}\Omega = 1\text{V}.$$

Superpoziciona komponenta U''_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.9b (u kom je idealni strujni generator struje 1mA anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator napona 5V anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti $1\text{k}\Omega$:

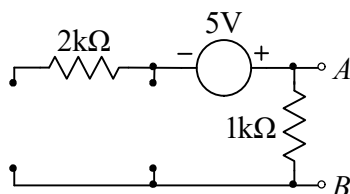
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.9b

$$U''_{AB} = 3\text{mA} \cdot 1\text{k}\Omega = 3\text{V}.$$

Superpoziciona komponenta U'''_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.9c (u kom su idealni strujni generator struje 1mA i idealni strujni generator struje 3mA anulirani tako što su zamenjeni otvorenim vezama) pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti $1\text{k}\Omega$, imajući u vidu da kroz taj otpornik ne protiče struja (jer u grani kola u kojoj se nalazi taj otpornik postoji prekid):



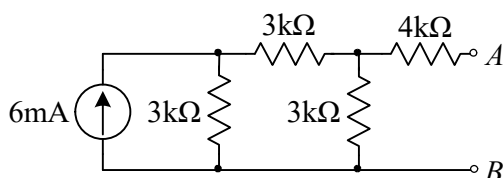
Slika 1.9c

$$U'''_{AB} = 0 \cdot 1\text{k}\Omega = 0.$$

Konačno, dobija se da je:

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} + U'''_{AB} = 1\text{V} + 3\text{V} + 0 = 4\text{V}.$$

- 1.10. a)** Za kolo sa slike 1.10 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .
b) Za kolo sa slike 1.10 odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B .
c) Ako se između tačaka A i B poveže otpornik otpornosti R_p , kolika treba da bude otpornost R_p da bi se na njoj razvijala maksimalna moguća snaga? Kolika je ta maksimalna moguća snaga?

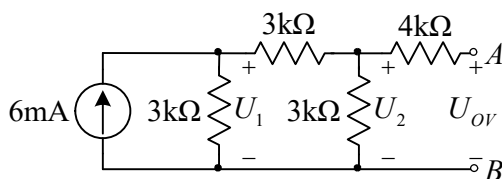


Slika 1.10

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B . S obzirom da na desnom kraju otpornika otpornosti $4\text{k}\Omega$ postoji prekid, kroz granu sa tim otpornikom neće proticati struja, tako da će i napon na tom otporniku biti jednak nuli. Stoga, na osnovu šeme sa slike 1.10a se može pisati:

$$U_T = U_{ov} = U_2.$$



Slika 1.10a

Napon U_2 (označen na slici 1.10a) je najlakše odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_T = U_{ov} = U_2 = \frac{3\text{k}\Omega}{3\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega} \cdot U_1 = \frac{1}{2} U_1.$$

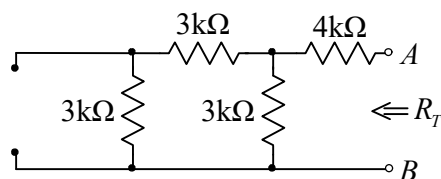
Napon U_1 (označen na slici 1.10a) se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni strujni generator struje 6mA :

$$U_1 = 6\text{mA} \cdot (3\text{k}\Omega \parallel (3\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega)) = 6\text{mA} \cdot 2\text{k}\Omega = 12\text{V}.$$

Dalje sledi:

$$U_T = U_{ov} = \frac{1}{2} U_1 = 6\text{V}.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.10b:

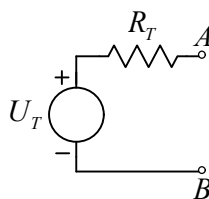


Slika 1.10b

$$R_T = ((3\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega) \parallel 3\text{k}\Omega) + 4\text{k}\Omega = 6\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.10a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.10c:

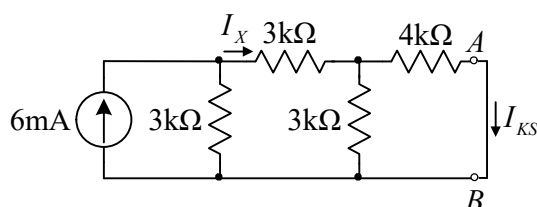
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.10c

b) Struja Nortonovog generatora I_N između tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B (nakon što se te dve tačke kratko spoje). Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.10d.

$$I_N = I_{KS}.$$



Slika 1.10d

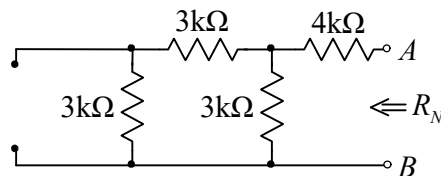
Struja I_X se može odrediti primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_X = \frac{3\text{k}\Omega}{3\text{k}\Omega + (3\text{k}\Omega + (3\text{k}\Omega \parallel 4\text{k}\Omega))} \cdot 6\text{mA} = \frac{7}{3} \text{mA},$$

a na osnovu struje I_X se može odrediti struja kratkog spoja I_{KS} (a time i struja Nortonovog generatora), takođe primenom formule za strujni razdelnik:

$$I_N = I_{KS} = \frac{3\text{k}\Omega}{3\text{k}\Omega + 4\text{k}\Omega} \cdot I_X = 1\text{mA}.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.10e:

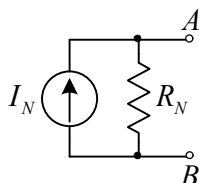


Slika 1.10e

$$R_N = ((3\text{k}\Omega + 3\text{k}\Omega) \parallel 3\text{k}\Omega) + 4\text{k}\Omega = 6\text{k}\Omega.$$

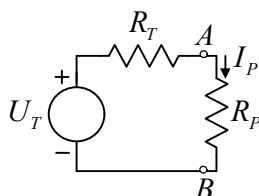
1. Električna kola stalnih struja

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.10d), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.10f:



Slika 1.10f

c) Ako se između tačaka A i B poveže otpornik otpornosti R_p , a deo kola levo od tačaka A i B predstavi ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, dobija se kolo prikazano na slici 1.10g.



Slika 1.10g

Snaga koja se razvija (disipira) na otporniku R_p se može izraziti na sledeći način:

$$P_{R_p} = I_P^2 \cdot R_p = \left(\frac{U_T}{R_T + R_p} \right)^2 \cdot R_p.$$

Otpornost R_p za koju je snaga P_{R_p} maksimalna se određuje iz uslova da je za tu vrednost R_p prvi izvod P_{R_p} po R_p jednak nuli:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = 0.$$

Dalje sledi:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = \frac{d}{dR_p} \left[\frac{U_T^2 \cdot R_p}{(R_T + R_p)^2} \right] = U_T^2 \cdot \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = U_T^2 \cdot \frac{R_T^2 - R_p^2}{(R_T + R_p)^4} = 0,$$

odakle se dobija da je:

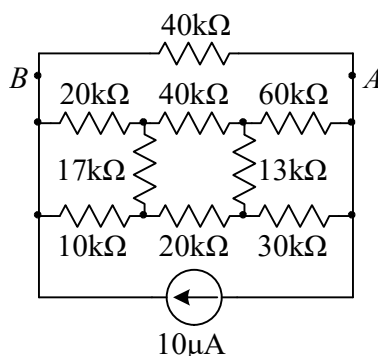
$$R_p = R_T = 6k\Omega.$$

Maksimalna moguća snaga koja se razvija (disipira) na otporniku R_p je:

$$P_{R_p \max} = P_{R_p} (R_p = 6\text{k}\Omega) = \left(\frac{U_T}{R_T + 6\text{k}\Omega} \right)^2 \cdot 6\text{k}\Omega = 1.5\text{mW}.$$

1.11. a) Za kolo sa slike 1.11 odrediti snage koje se disipiraju na otpornicima otpornosti $17\text{k}\Omega$ i $13\text{k}\Omega$.

b) Za kolo sa slike 1.11 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola ispod tačaka A i B .



Slika 1.11

Rešenje:

a) Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da za odnos otpornosti tri horizontalno postavljena otpornika u redu neposredno ispod tačaka A i B i odnos otpornosti tri horizontalno postavljena otpornika u redu neposredno iznad idealnog strujnog generatora struje $10\mu\text{A}$ važi:

$$20\text{k}\Omega : 40\text{k}\Omega : 60\text{k}\Omega = 10\text{k}\Omega : 20\text{k}\Omega : 30\text{k}\Omega,$$

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između tačaka A i B , potencijal gornjeg kraja otpornika otpornosti $17\text{k}\Omega$ biti jednak potencijalu donjeg kraja tog otpornika, kao i da će potencijal gornjeg kraja otpornika otpornosti $13\text{k}\Omega$ biti jednak potencijalu donjeg kraja tog otpornika. Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za otpornik otpornosti $17\text{k}\Omega$ i za otpornik otpornosti $13\text{k}\Omega$) i da će struja kroz otpornik otpornosti $17\text{k}\Omega$ biti jednaka nuli, kao i da će struja kroz otpornik otpornosti $13\text{k}\Omega$ biti jednaka nuli koliki god da je napon između tačaka A i B .

To znači da se otpornici otpornosti $17\text{k}\Omega$ i $13\text{k}\Omega$ mogu zameniti bilo kratkim spojevima (jer je napon na njihovim krajevima jednak nuli), bilo otvorenim vezama (jer su struje kroz te otpornike jednake nuli), tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo.

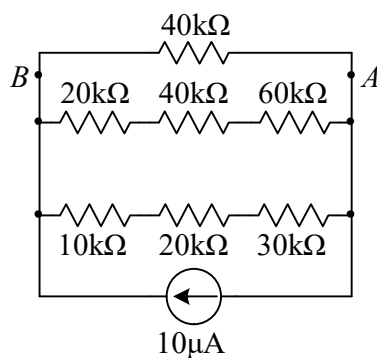
S obzirom da su struje kroz otpornike otpornosti $17\text{k}\Omega$ i $13\text{k}\Omega$ jednake nuli, i snage koje se disipiraju na otpornicima otpornosti $17\text{k}\Omega$ i $13\text{k}\Omega$ su takođe jednake nuli:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{17k\Omega} = 0,$$

$$P_{13k\Omega} = 0.$$

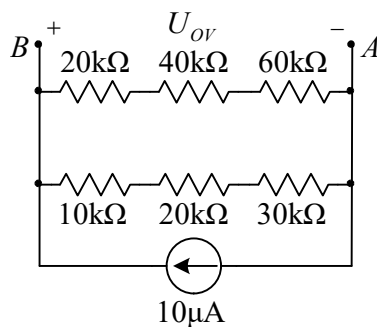
b) Analizom pod tačkom **a)** je zaključeno da se otpornici otpornosti $17k\Omega$ i $13k\Omega$ mogu zameniti bilo kratkim spojevima, bilo otvorenim vezama, tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo. Ukoliko se otpornici otpornosti $17k\Omega$ i $13k\Omega$ zamene otvorenim vezama, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.11a:



Slika 1.11a

Napon Tevenenovog generatora za deo kola ispod tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B (ili između tačaka B i A), na osnovu šeme sa slike 1.11b na način:

$$U_T = U_{OV}.$$



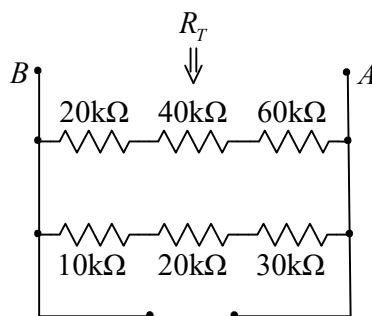
Slika 1.11b

Napon U_{OV} (označen na slici 1.11b) se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni strujni generator struje $10\mu A$:

$$U_T = U_{OV} = 10\mu A \cdot \left((20k\Omega + 40k\Omega + 60k\Omega) \parallel (10k\Omega + 20k\Omega + 30k\Omega) \right) = 10\mu A \cdot 40k\Omega = 0.4V$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.11c:

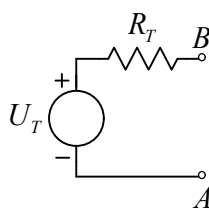
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.11c

$$R_T = (20\text{k}\Omega + 40\text{k}\Omega + 60\text{k}\Omega) \parallel (10\text{k}\Omega + 20\text{k}\Omega + 30\text{k}\Omega) = 40\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.11b), može se zaključiti da će traženi Thevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.11d:

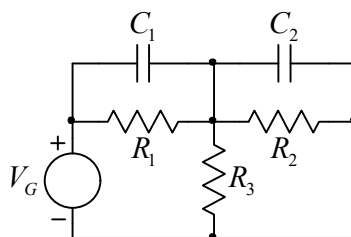


Slika 1.11d

1.12. Za kolo sa slike 1.12 je poznato da je $R_1 = R_2 = R_3 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 10\text{nF}$ i $V_G = 1\text{V}$.

a) Odrediti struje kroz svaki od otpornika.

b) Odrediti količine naelektrisanja na svakom od kondenzatora.



Slika 1.12

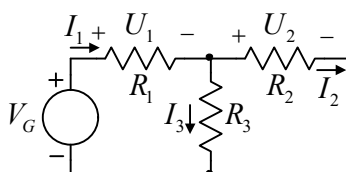
Rešenje:

a) S obzirom da u kolu postoji samo jedan generator, i to idealni naponski generator konstantnog napona, i svi ostali naponi u kolu i sve struje u kolu će biti konstantne. U kolu sa konstantnim

1. Električna kola stalnih struja

strujama kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama, kao što je to prikazano na slici 1.12a.

Pošto u postavci zadatka nisu navedeni referentni smerovi struja kroz otpornike koje je potrebno odrediti, ti referentni smerovi se mogu izabrati proizvoljno, i potom za te proizvoljno izabrane referentne smerove izračunati algebarske vrednosti struja. Takođe, oznake za tražene struje se mogu proizvoljno izabrati, s obzirom da u postavci zadatka nisu navedene. Imajući to u vidu, tražene struje su označene sa I_1 , I_2 i I_3 , a referentni smerovi su usvojeni kao što je to prikazano na slici 1.12a.



Slika 1.12a

Napon U_1 , označen na slici 1.12a, se može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \cdot V_G = \frac{2}{3} V_G = \frac{2}{3} \text{ V}.$$

Tražena struja kroz otpornik R_1 se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik R_1 :

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{1}{15} \text{ mA}.$$

Napon U_2 , označen na slici 1.12a, je ne samo napon na otporniku R_2 , već i napon na otporniku R_3 , kao i napon na paralelnoj vezi otpornika R_2 i R_3 . Zbog toga se napon na otpornicima R_2 i R_3 može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_2 = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \cdot V_G = \frac{1}{3} V_G = \frac{1}{3} \text{ V}.$$

Tražena struja kroz otpornik R_2 se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik R_2 :

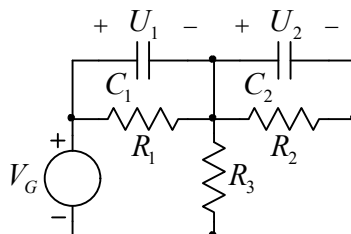
$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1}{30} \text{ mA}.$$

Tražena struja kroz otpornik R_3 se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik R_3 :

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = \frac{1}{30} \text{ mA}.$$

1. Električna kola stalnih struja

b) S obzirom da su U_1 i U_2 takođe i naponi na kondenzatorima C_1 i C_2 , respektivno, kao što je to prikazano na slici 1.12b:



Slika 1.12b

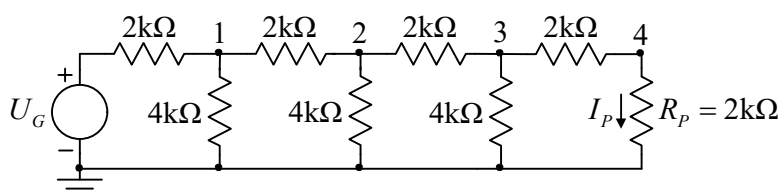
količina naelektrisanja q_1 na kondenzatoru kapacitivnosti C_1 i količina naelektrisanja q_2 na kondenzatoru kapacitivnosti C_2 se mogu odrediti na sledeći način:

$$q_1 = C_1 \cdot U_1 = \frac{20}{3} \text{ nC},$$

$$q_2 = C_2 \cdot U_2 = \frac{10}{3} \text{ nC}.$$

1.13. a) Za kolo sa slike 1.13 odrediti potencijale tačaka 1, 2, 3 i 4, ako je poznato da je $U_G = 4\text{V}$.

b) Ako je struja kroz otpornik otpornosti R_p jednaka $I_p = 0.5\text{mA}$, koliki je u tom slučaju napon idealnog naponskog generatora U_G ?



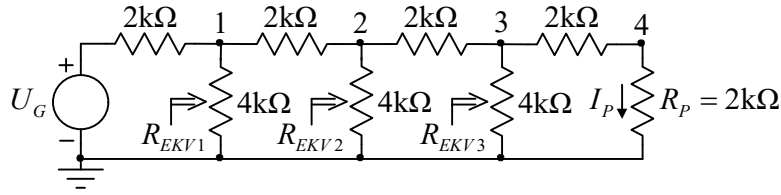
Slika 1.13

Rešenje:

a) Veza između potencijala tačaka 3 i 4, u kolu sa slike 1.13, se može uspostaviti primenom formule za razdelnik napona:

$$V_4 = \frac{R_p}{R_p + 2\text{k}\Omega} \cdot V_3 = \frac{1}{2} V_3.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.13a

Veza između potencijala tačaka 2 i 3 se može uspostaviti primenom formule za razdelnik napona:

$$V_3 = \frac{R_{EKV3}}{R_{EKV3} + 2k\Omega} \cdot V_2.$$

Otpornost R_{EKV3} (prikazana na slici 1.13a) predstavlja ekvivalentnu otpornost koja se vidi između tačke 3 i mase, gledano na desno (a koja uključuje i otpornik otpornosti $4k\Omega$ povezan između tačke 3 i mase). Otpornost R_{EKV3} se može odrediti na sledeći način:

$$R_{EKV3} = 4k\Omega \parallel (2k\Omega + R_P) = 2k\Omega.$$

Na osnovu toga se dobija da je:

$$V_3 = \frac{1}{2} V_2.$$

Veza između potencijala tačaka 1 i 2 se može uspostaviti primenom formule za razdelnik napona:

$$V_2 = \frac{R_{EKV2}}{R_{EKV2} + 2k\Omega} \cdot V_1.$$

Otpornost R_{EKV2} (prikazana na slici 1.13a) predstavlja ekvivalentnu otpornost koja se vidi između tačke 2 i mase, gledano na desno (a koja uključuje i otpornik otpornosti $4k\Omega$ povezan između tačke 2 i mase). Otpornost R_{EKV2} se može odrediti na sledeći način:

$$R_{EKV2} = 4k\Omega \parallel (2k\Omega + R_{EKV3}) = 2k\Omega.$$

Na osnovu toga se dobija da je:

$$V_2 = \frac{1}{2} V_1.$$

Veza između napona U_G i potencijala tačke 1 se može uspostaviti primenom formule za razdelnik napona:

$$V_1 = \frac{R_{EKV1}}{R_{EKV1} + 2k\Omega} \cdot U_G.$$

1. Električna kola stalnih struja

Otpornost R_{EKV1} (prikazana na slici 1.13a) predstavlja ekvivalentnu otpornost koja se vidi između tačke 1 i mase, gledano na desno (a koja uključuje i otpornik otpornosti $4\text{k}\Omega$ povezan između tačke 1 i mase). Otpornost R_{EKV1} se može odrediti na sledeći način:

$$R_{EKV1} = 4\text{k}\Omega \parallel (2\text{k}\Omega + R_{EKV2}) = 2\text{k}\Omega.$$

Na osnovu toga se dobija da je:

$$V_1 = \frac{1}{2}U_G = 2\text{V}.$$

Korišćenjem izvedenih relacija između potencijala tačaka 1, 2, 3 i 4, sledi:

$$V_2 = \frac{1}{2}V_1 = 1\text{V},$$

$$V_3 = \frac{1}{2}V_2 = 0.5\text{V},$$

$$V_4 = \frac{1}{2}V_3 = 0.25\text{V}.$$

b) Na osnovu Omovog zakona za otpornik otpornosti R_p važi:

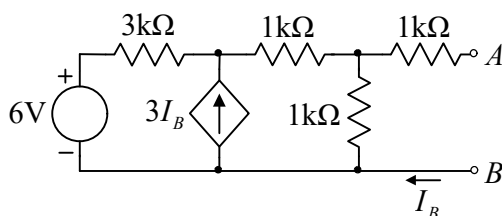
$$V_4 = R_p \cdot I_p = 2\text{k}\Omega \cdot 0.5\text{mA} = 1\text{V}.$$

Na osnovu relacija izvedenih pod tačkom **a)**, a koje povezuju potencijale tačaka 1, 2, 3, 4 i napon U_G , može se zaključiti da je:

$$U_G = 2V_1 = 4V_2 = 8V_3 = 16V_4 = 16\text{V}.$$

1.14. a) Za kolo sa slike 1.14 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .

b) Za kolo sa slike 1.14 odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B .



Slika 1.14

Rešenje:

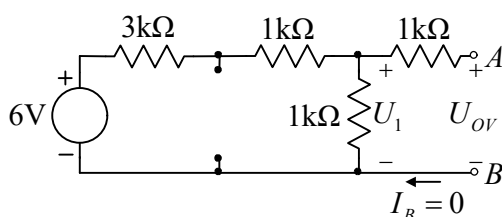
a) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B . S obzirom da na desnom kraju grane kroz koju protiče struja I_B postoji prekid, kroz tu granu neće proticati struja, tako da će biti:

$$I_B = 0.$$

Zbog toga će i struja zavisnog strujnog generatora $3I_B$ biti jednaka nuli, što znači da se taj zavisni strujni generator može zameniti otvorenom vezom, tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo, prikazano na slici 1.14a.

Takođe, pošto na desnom kraju krajnjeg desnog otpornika otpornosti $1k\Omega$ postoji prekid, kroz granu sa tim otpornikom neće proticati struja, tako da će i napon na tom otporniku biti jednak nuli. Stoga, na osnovu šeme sa slike 1.14a se može pisati:

$$U_T = U_{OV} = U_1.$$

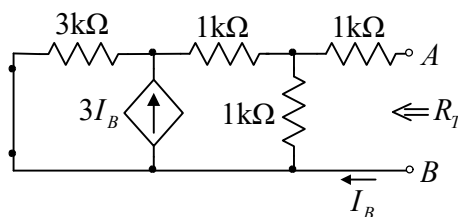


Slika 1.14a

Napon U_1 (označen na slici 1.14a) je najlakše odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_T = U_{OV} = U_1 = \frac{1k\Omega}{1k\Omega + 3k\Omega + 1k\Omega} \cdot 6V = \frac{6}{5}V = 1.2V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje kao ekvivalentna otpornost između tačaka A i B , za kolo sa slike 1.14b:

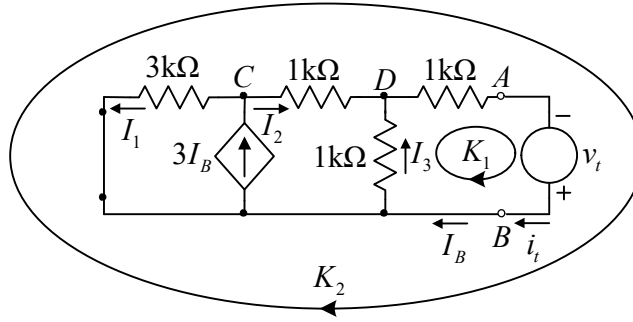


Slika 1.14b

Pošto u kolu sa slike 1.14b postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.14c kao:

$$R_T = \frac{v_t}{i_t}.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.14c

Za kolo sa slike 1.14c se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona glasi:

$$v_t - I_3 \cdot 1\text{k}\Omega - i_t \cdot 1\text{k}\Omega = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_2 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona je:

$$v_t + I_1 \cdot 3\text{k}\Omega - I_2 \cdot 1\text{k}\Omega - i_t \cdot 1\text{k}\Omega = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C glasi (imajući u vidu da je $I_B = i_t$, što se vidi sa slike 1.14c):

$$I_1 + I_2 = 3I_B = 3i_t.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor D je:

$$I_2 + I_3 = i_t.$$

Ako se iz pretposlednje jednačine izrazi struja I_2 , a iz poslednje jednačine izrazi struja I_3 , dobija se:

$$I_2 = 3i_t - I_1,$$

$$I_3 = i_t - I_2 = -2i_t + I_1.$$

Ako se potom izvedeni izrazi za struje I_2 i I_3 uvrste u dve jednačine napisane po Kirhofovima zakonima za napone, dobija se:

$$v_t - (-2i_t + I_1) \cdot 1\text{k}\Omega - i_t \cdot 1\text{k}\Omega = 0 \Rightarrow v_t - I_1 \cdot 1\text{k}\Omega + i_t \cdot 1\text{k}\Omega = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{v_t}{1\text{k}\Omega} + i_t,$$

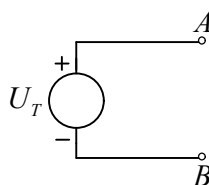
$$v_t + I_1 \cdot 3\text{k}\Omega - (3i_t - I_1) \cdot 1\text{k}\Omega - i_t \cdot 1\text{k}\Omega = 0 \Rightarrow v_t + I_1 \cdot 4\text{k}\Omega - 4i_t \cdot 1\text{k}\Omega = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{v_t}{4\text{k}\Omega} + i_t.$$

1. Električna kola stalnih struja

Izjednačavanjem poslednja dva izraza za struju I_1 se dobija:

$$\frac{v_t}{1\text{k}\Omega} + i_t = -\frac{v_t}{4\text{k}\Omega} + i_t \Rightarrow \frac{5v_t}{4\text{k}\Omega} = 0 \cdot i_t \Rightarrow R_T = \frac{v_t}{i_t} = 0 \cdot \frac{4\text{k}\Omega}{5} = 0.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.14a), i imajući u vidu izračunatu otpornost Tevenenovog generatora, može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.14d:



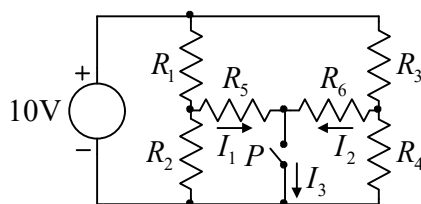
Slika 1.14d

b) S obzirom da je ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B idealni naponski generator, ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B ne postoji.

1.15. Za kolo sa slike 1.15 je poznato da je $R_1 = 5\text{k}\Omega$, $R_2 = R_5 = 10\text{k}\Omega$, $R_3 = 50\text{k}\Omega$ i $R_4 = R_6 = 100\text{k}\Omega$.

a) Odrediti struje I_1 i I_2 ako je prekidač P otvoren.

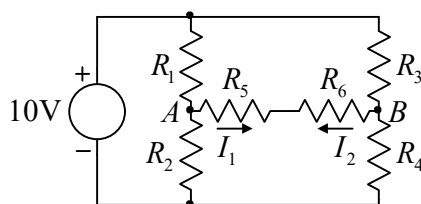
b) Odrediti struje I_1 , I_2 i I_3 ako je prekidač P zatvoren.



Slika 1.15

Rešenje:

a) Kada je prekidač P otvoren, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.15a:



Slika 1.15a

Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da važi:

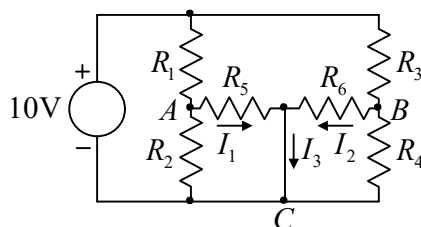
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

što znači da će zbog simetrije potencijali tačaka A i B biti međusobno jednaki (tj. otpornički most će biti u ravnoteži). Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za rednu vezu otpornika R_5 i R_6) i da će struja kroz rednu vezu otpornika R_5 i R_6 biti jednaka nuli, tj. da će biti:

$$I_1 = 0,$$

$$I_2 = 0.$$

b) Kada je prekidač P zatvoren, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.15b:



Slika 1.15b

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor u kojem se spajaju grane kroz koje protiču struje I_1 , I_2 i I_3 , važi:

$$I_3 = I_1 + I_2.$$

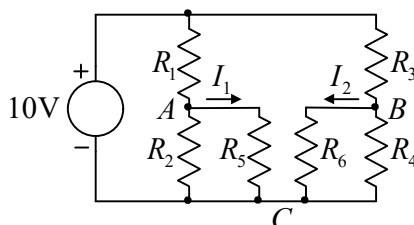
Na slici 1.15c je prikazano kolo koje je ekvivalentno kolu sa slike 1.15b. Na osnovu kola sa slike 1.15c, struja I_1 se može odrediti pomoću Omovog zakona za otpornik R_5 :

$$I_1 = \frac{U_{AC}}{R_5},$$

dok se struja I_2 se može odrediti pomoću Omovog zakona za otpornik R_6 :

1. Električna kola stalnih struja

$$I_2 = \frac{U_{BC}}{R_6}.$$



Slika 1.15c

Napone U_{AC} i U_{BC} je moguće odrediti primenom odgovarajućih formula za razdelnik napona:

$$U_{AC} = \frac{R_2 \parallel R_5}{R_1 + (R_2 \parallel R_5)} \cdot 10V = 5V,$$

$$U_{BC} = \frac{R_4 \parallel R_6}{R_3 + (R_4 \parallel R_6)} \cdot 10V = 5V.$$

Na osnovu izračunatih vrednosti napona U_{AC} i U_{BC} se dobija:

$$I_1 = \frac{U_{AC}}{R_5} = 500\mu A,$$

$$I_2 = \frac{U_{BC}}{R_6} = 50\mu A.$$

Konačno, struja I_3 je:

$$I_3 = I_1 + I_2 = 550\mu A.$$

1.16. U kolu sa slike 1.16 moguće je metodom superpozicije odrediti struju I_3 kao $I_3 = I'_3 + I''_3 + I'''_3$, pri čemu je $I'_3 = I_3(V_G \neq 0, I_{G1} = 0, I_{G2} = 0)$, $I''_3 = I_3(V_G = 0, I_{G1} \neq 0, I_{G2} = 0)$ i $I'''_3 = I_3(V_G = 0, I_{G1} = 0, I_{G2} \neq 0)$. Zbog linearnosti kola važi da je $I_3 = k_1 \cdot V_G + k_2 \cdot I_{G1} + k_3 \cdot I_{G2}$.

a) Dokazati da je $k_1 = I'_3 / V_G$, $k_2 = I''_3 / I_{G1}$ i $k_3 = I'''_3 / I_{G2}$.

b) Ako je $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10k\Omega$, odrediti konstante k_1 , k_2 i k_3 .

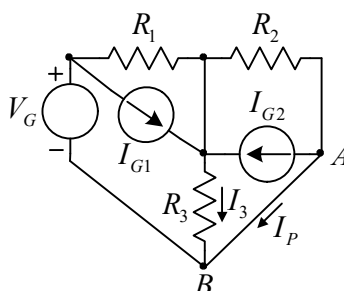
c) Ako je $V_G = 3V$, $I_{G1} = 1mA \cdot \cos(t)$ i $I_{G2} = -1mA \cdot e^{t/s}$, odrediti struju $I_3(t)$.

d) Pod uslovima iz prethodne tačke, izračunati struju $I_3(t=0)$.

1. Električna kola stalnih struja

e) Ako se kratak spoj između tačaka A i B ukloni iz kola, odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B u funkciji parametara V_G , I_{G1} , I_{G2} i R .

f) Koristeći rezultat iz prethodne tačke izračunati struju $I_P(t=0)$, ako je $V_G = 3V$, $I_{G1} = 1mA \cdot \cos(t)$ i $I_{G2} = -1mA \cdot e^{t/s}$.



Slika 1.16

Rešenje:

a) Kao što je rečeno u tekstu zadatka, za dato kolo važi da je:

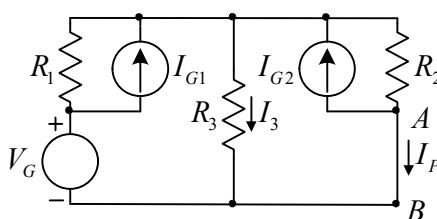
$$I_3 = k_1 \cdot V_G + k_2 \cdot I_{G1} + k_3 \cdot I_{G2}.$$

Ako se u prethodnu jednačinu zamene izrazi $k_1 = I'_3 / V_G$, $k_2 = I''_3 / I_{G1}$ i $k_3 = I'''_3 / I_{G2}$, dobija se:

$$I_3 = \frac{I'_3}{V_G} \cdot V_G + \frac{I''_3}{I_{G1}} \cdot I_{G1} + \frac{I'''_3}{I_{G2}} \cdot I_{G2} = I'_3 + I''_3 + I'''_3,$$

čime je dokaz kompletiran.

b) Da bi se odredile tražene konstante k_1 , k_2 i k_3 , potrebno je najpre izvesti izraz za struju I_3 . U tu svrhu, kolo sa slike 1.16 se može predstaviti na potpuno ekvivalentan način prikazan na slici 1.16a:

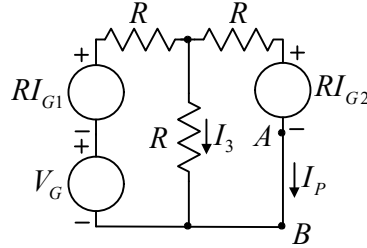


Slika 1.16a

Transformacijom paralelne veze idealnog strujnog generatora I_{G1} i otpornika otpornosti R_1 u rednu vezu idealnog naponskog generatora napona $R_1 I_{G1}$ i otpornika otpornosti R_1 , zatim transformacijom paralelne veze idealnog strujnog generatora I_{G2} i otpornika otpornosti R_2 u rednu vezu idealnog naponskog generatora napona $R_2 I_{G2}$ i otpornika otpornosti R_2 , i

1. Električna kola stalnih struja

korišćenjem činjenice da je po uslovu zadatka $R_1 = R_2 = R_3 = R$, dobija se kolo sa slike 1.16b, koje je ekvivalentno kolu prikazanom na slici 1.16a:



Slika 1.16b

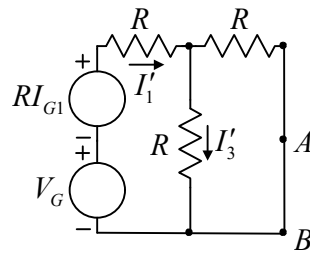
Struja I_3 , u kolu sa slike 1.16b, se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente I'_3 koja nastaje kada u kolu deluju idealni naponski generatori napona V_G i napona RI_{G1} , dok je idealni naponski generator napona RI_{G2} anuliran, i komponente I''_3 koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator napona RI_{G2} , dok su idealni naponski generatori napona V_G i napona RI_{G1} anulirani:

$$I_3 = I'_3 + I''_3,$$

$$I'_3 = I_3(V_G \neq 0, RI_{G1} \neq 0, RI_{G2} = 0),$$

$$I''_3 = I_3(V_G = 0, RI_{G1} = 0, RI_{G2} \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta I'_3 se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.16c (u kom je idealni naponski generator napona RI_{G2} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem).



Slika 1.16c

U tom kolu, struja I'_1 se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi redna veza idealnih naponskih generatora napona V_G i napona RI_{G1} :

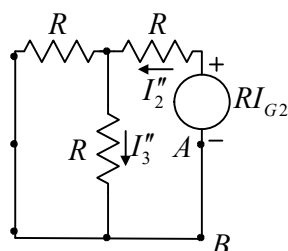
$$I'_1 = \frac{V_G + RI_{G1}}{R + (R \parallel R)} = \frac{2}{3R}(V_G + RI_{G1}),$$

1. Električna kola stalnih struja

a na osnovu struje I'_1 se može odrediti superpoziciona komponenta I'_3 , primenom formule za strujni razdelnik:

$$I'_3 = \frac{R}{R+R} \cdot I'_1 = \frac{1}{2} I'_1 = \frac{1}{3R} (V_G + RI_{G1}).$$

Superpoziciona komponenta I''_3 se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.16d (u kom su idealni naponski generatori napona V_G i napona RI_{G1} anulirani tako što su zamenjeni kratkim spojevima).



Slika 1.16d

U tom kolu, struja I''_2 se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost koju vidi idealni naponski generator napona RI_{G2} :

$$I''_2 = \frac{RI_{G2}}{R + (R \parallel R)} = \frac{2}{3R} \cdot RI_{G2} = \frac{2}{3} I_{G2},$$

a na osnovu struje I''_2 se može odrediti superpoziciona komponenta I''_3 , primenom formule za strujni razdelnik:

$$I''_3 = \frac{R}{R+R} \cdot I''_2 = \frac{1}{2} I''_2 = \frac{1}{3} I_{G2}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{1}{3R} \cdot V_G + \frac{1}{3} I_{G1} + \frac{1}{3} I_{G2},$$

iz čega se može zaključiti (imajući u vidu izraz $I_3 = k_1 \cdot V_G + k_2 \cdot I_{G1} + k_3 \cdot I_{G2}$) da je:

$$k_1 = \frac{1}{3R}, \quad k_2 = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad k_3 = \frac{1}{3}.$$

c) S obzirom da je po uslovu zadatka $V_G = 3\text{V}$, $I_{G1} = 1\text{mA} \cdot \cos(t)$ i $I_{G2} = -1\text{mA} \cdot e^{t/s}$, imajući u vidu izraz za struju I_3 izveden u prethodnoj tački ovog zadatka, struja $I_3(t)$ se može odrediti na sledeći način:

1. Električna kola stalnih struja

$$I_3(t) = \frac{1}{3R} \cdot V_G + \frac{1}{3} I_{G1} + \frac{1}{3} I_{G2} = \frac{1}{3 \cdot 10 \text{k}\Omega} \cdot 3\text{V} + \frac{1}{3} \cdot 1\text{mA} \cdot \cos(t) - \frac{1}{3} \cdot 1\text{mA} \cdot e^{t/s},$$

tako da se konačno dobija:

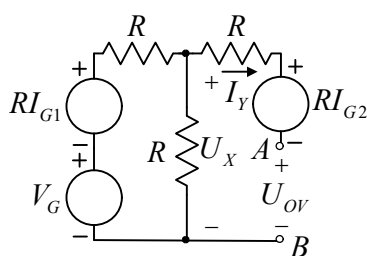
$$I_3(t) = 0.1\text{mA} + \frac{1}{3} \text{mA} \cdot \cos(t) - \frac{1}{3} \text{mA} \cdot e^{t/s}.$$

d) Polazeći od izraza izvedenog u prethodnoj tački, dobija se:

$$I_3(t=0) = 0.1\text{mA} + \frac{1}{3} \text{mA} \cdot \cos(0) - \frac{1}{3} \text{mA} \cdot e^{0/s} = 0.1\text{mA} + \frac{1}{3} \text{mA} - \frac{1}{3} \text{mA} = 0.1\text{mA}.$$

e) Ako se kratak spoj između tačaka A i B ukloni iz kola (po uslovu zadatka), za tako dobijeno kolo napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B (kao što je to prikazano na slici 1.16e). S obzirom da na donjem kraju grane, u kojoj se nalazi redna veza krajnjeg desnog otpornika otpornosti R i idealnog naponskog generatora napona RI_{G2} , postoji prekid, kroz tu granu neće proticati struja (tj. biće $I_Y = 0$), tako da će i napon na pomenutom otporniku biti jednak nuli. Stoga, na osnovu šeme sa slike 1.16e se može pisati:

$$U_T = U_{OV} = U_X - RI_{G2}.$$



Slika 1.16e

Napon U_X je najlakše odrediti primenom formule za razdelnik napona:

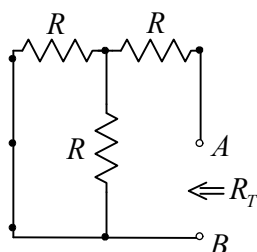
$$U_X = \frac{R}{R+R} \cdot (V_G + RI_{G1}) = \frac{1}{2} (V_G + RI_{G1}),$$

tako da se dobija da je:

$$U_T = U_{OV} = U_X - RI_{G2} = \frac{1}{2} V_G + \frac{1}{2} RI_{G1} - RI_{G2}.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.16f:

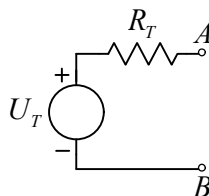
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.16f

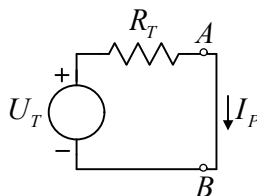
$$R_T = R + (R \parallel R) = \frac{3}{2} R.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.16e), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.16g:



Slika 1.16g

f) Kolo sa slike 1.16 se, korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, može predstaviti ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 1.16h:



Slika 1.16h

Struja I_P (označena na slici 1.16h) se može odrediti pomoću Omovog zakona za otpornik R_T :

$$I_P = \frac{U_T}{R_T} = \frac{2}{3R} \cdot \left(\frac{1}{2} V_G + \frac{1}{2} R I_{G1} - R I_{G2} \right) = \frac{1}{3R} \cdot V_G + \frac{1}{3} I_{G1} - \frac{2}{3} I_{G2}.$$

S obzirom da je po uslovu zadatka $V_G = 3V$, $I_{G1} = 1mA \cdot \cos(t)$ i $I_{G2} = -1mA \cdot e^{t/s}$, sledi da je:

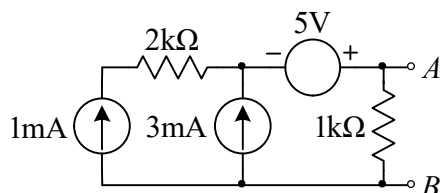
$$I_P(t) = \frac{1}{3 \cdot 10k\Omega} \cdot 3V + \frac{1}{3} \cdot 1mA \cdot \cos(t) + \frac{2}{3} \cdot 1mA \cdot e^{t/s} = 0.1mA + \frac{1}{3} mA \cdot \cos(t) + \frac{2}{3} mA \cdot e^{t/s}.$$

Polazeći od prethodnog izraza, konačno se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$I_p(t=0) = 0.1\text{mA} + \frac{1}{3}\text{mA} \cdot \cos(0) + \frac{2}{3}\text{mA} \cdot e^{0/s} = 0.1\text{mA} + \frac{1}{3}\text{mA} + \frac{2}{3}\text{mA} = 1.1\text{mA}.$$

1.17. Za kolo sa slike 1.17 odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B .



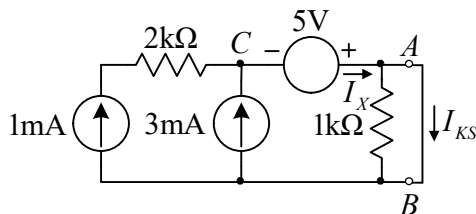
Slika 1.17

Rešenje:

Struja Nortonovog generatora I_N između tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B (nakon što se te dve tačke kratko spoje):

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.17a.



Slika 1.17a

S obzirom da su tačke A i B kratko spojene, napon na otporniku otpornosti $1\text{k}\Omega$ će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz taj otpornik neće proticati struja. Imajući to u vidu, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor A važi:

$$I_{KS} = I_X.$$

Struja I_X se može odrediti pomoću Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

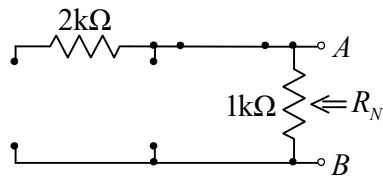
$$I_X = 1\text{mA} + 3\text{mA} = 4\text{mA}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$I_N = I_{KS} = I_X = 4\text{mA}.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.17b:

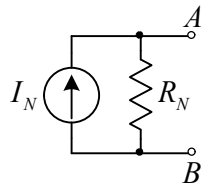
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.17b

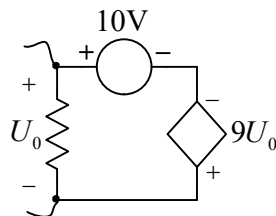
$$R_N = 1\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.17a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.17c:



Slika 1.17c

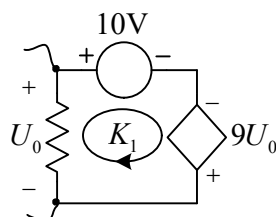
1.18. Za kolo sa slike 1.18 odrediti napon U_0 .



Slika 1.18

Rešenje:

Za kolo sa slike 1.18 se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.18a):



Slika 1.18a

1. Električna kola stalnih struja

$$U_0 - 10V + 9U_0 = 0.$$

Iz prethodne jednačine sledi:

$$10U_0 = 10V,$$

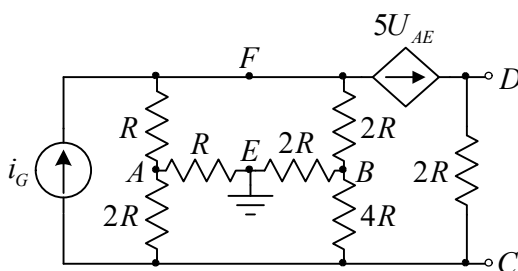
odakle se dobija da je konačno:

$$U_0 = 1V.$$

1.19. Za kolo sa slike 1.19 je poznato da je $R = 1.5k\Omega$.

a) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka D i C .

b) Ako je potencijal tačke C jednak $V_C = -1.7V$ pri struji idealnog strujnog generatora $i_G = I_0$, koliki će biti potencijal tačke D ako se intenzitet struje idealnog strujnog generatora promeni na $i_G = 2I_0$?



Slika 1.19

Rešenje:

a) Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da je odnos otpornosti otpornika povezanog između čvorova F i A i otpornika povezanog između čvorova A i C jednak odnosu otpornosti otpornika povezanog između čvorova F i B i otpornika povezanog između čvorova B i C :

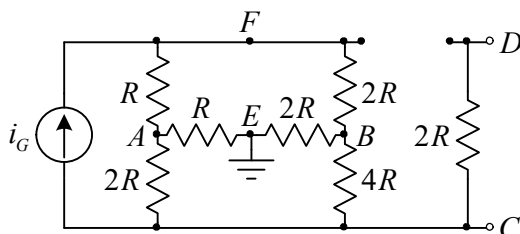
$$\frac{R}{2R} = \frac{2R}{4R},$$

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između čvorova F i C , potencijal čvora A biti jednak potencijalu čvora B (tj. otpornički most će biti u ravnoteži). Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za rednu vezu dva otpornika povezana između čvorova A i B) i da će struja kroz rednu vezu ta dva otpornika biti jednaka nuli, koliki god da je napon između čvorova F i C . Zbog toga će po Omovom zakonu važiti i:

$$U_{AE} = 0.$$

1. Električna kola stalnih struja

To znači da će biti i $5U_{AE} = 0$, tj. da će struja zavisnog strujnog generatora biti jednaka nuli, tako da se zavisni strujni generator struje $5U_{AE}$ može zameniti otvorenom vezom, na način da se dobije potpuno ekvivalentno kolo prikazano na slici 1.19a:

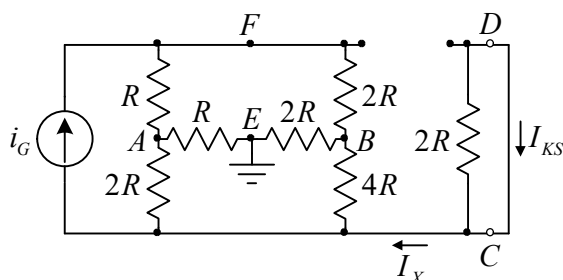


Slika 1.19a

Struja Nortonovog generatora I_N između tačaka D i C se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka D i C (nakon što se te dve tačke kratko spoje):

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.19b.



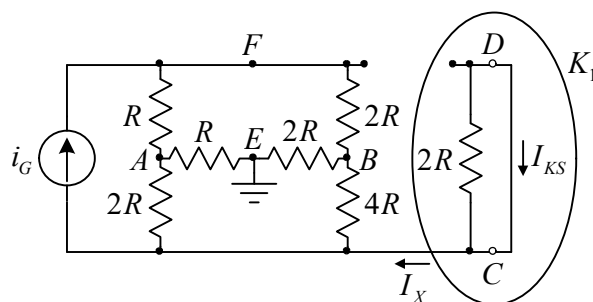
Slika 1.19b

S obzirom da su tačke D i C kratko spojene, napon na otporniku otpornosti $2R$ povezanom između tačaka D i C će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz taj otpornik neće proticati struja. Imajući to u vidu, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku u koju su povezane grane kroz koje protiču struje I_{KS} i I_X , i grana sa pomenutim otpornikom otpornosti $2R$ (povezanim između tačaka D i C), važi:

$$I_{KS} = I_X.$$

Struja I_X se može odrediti pomoću Kirhofovog zakona za struje za konturu K_1 prikazanu na slici 1.19c:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.19c

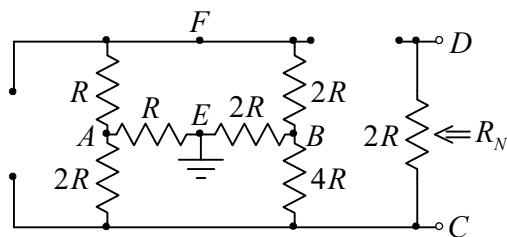
Naime, po Kirhofovom zakonu za struje, suma algebarskih vrednosti struja svih grana koje ulaze u konturu K_1 mora biti jednaka nuli. Pošto samo grana kroz koju protiče struja I_X ulazi u konturu K_1 , to znači da mora biti:

$$I_X = 0.$$

Konačno, dobija se da je:

$$I_N = I_{KS} = I_X = 0.$$

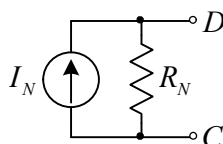
Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.19d:



Slika 1.19d

$$R_N = 2R = 3\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.19b), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.19e:



Slika 1.19e

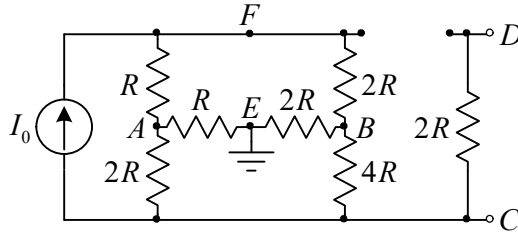
b) Na osnovu šeme prikazane na slici 1.19a, može se zaključiti da kroz otpornik otpornosti $2R$ koji je povezan između tačaka D i C neće proticati struja, jer na gornjem kraju tog otpornika

1. Električna kola stalnih struja

postoji prekid. Stoga, na osnovu Omovog zakona za taj otpornik se može zaključiti da će potencijali tačaka D i C biti međusobno jednaki:

$$V_D = V_C.$$

Kada je $i_G = I_0$, ekvivalentna šema kola će imati izgled prikazan na slici 1.19f:

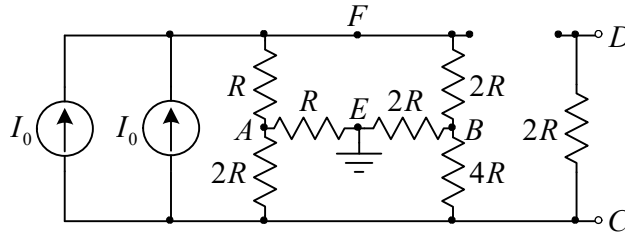


Slika 1.19f

Imajući u vidu uslov zadatka, tada će biti:

$$V_D(i_G = I_0) = V_C(i_G = I_0) = -1.7V.$$

Kada je $i_G = 2I_0$, ekvivalentna šema kola će moći da se predstavi na način prikazan na slici 1.19g:



Slika 1.19g

U tom slučaju, traženi potencijal tačke D će moći, primenom principa superpozicije, da se predstavi kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente V'_D koja nastaje kada u kolu deluje levi idealni strujni generator I_0 , dok je desni idealni strujni generator I_0 anuliran (tj. zamenjen otvorenom vezom), i komponente V''_D koja nastaje kada u kolu deluje desni idealni strujni generator I_0 , dok je levi idealni strujni generator I_0 anuliran (tj. zamenjen otvorenom vezom):

$$V_D(i_G = 2I_0) = V'_D + V''_D,$$

$$V'_D = V_D(I_{0(L)} \neq 0, I_{0(D)} = 0),$$

$$V''_D = V_D(I_{0(L)} = 0, I_{0(D)} \neq 0).$$

1. Električna kola stalnih struja

Superpozicione komponente V'_D i V''_D se mogu odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.19f kao:

$$V'_D = V_D(i_G = I_0) = -1.7\text{V},$$

$$V''_D = V_D(i_G = I_0) = -1.7\text{V}.$$

Konačno, dobija se da je:

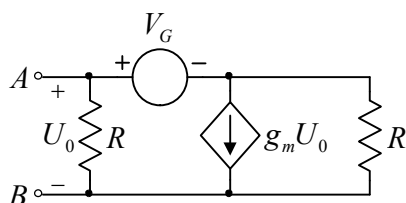
$$V_D(i_G = 2I_0) = V'_D + V''_D = -3.4\text{V}.$$

1.20. Za kolo sa slike 1.20 je poznato da je $V_G = 10\text{V}$, $R = 1\text{k}\Omega$ i $g_m = 3\text{mS}$.

a) Odrediti napon U_0 .

b) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .

c) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator između tačaka A i B .



Slika 1.20

Rešenje:

a) Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor B , u kojoj su struje kroz odgovarajuće otpornike izražene preko Omovog zakona, glasi:

$$\frac{U_0}{R} + g_m U_0 + \frac{U_0 - V_G}{R} = 0.$$

Ta jednačina se može napisati i u obliku:

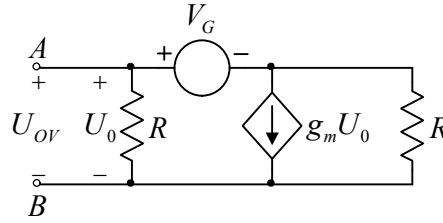
$$\left(\frac{2}{R} + g_m\right) \cdot U_0 = \frac{V_G}{R},$$

odakle se dobija da je:

$$U_0 = \frac{V_G}{2 + R \cdot g_m} = 2\text{V}.$$

b) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B . Taj napon se može odrediti na osnovu šeme sa slike 1.20a:

1. Električna kola stalnih struja



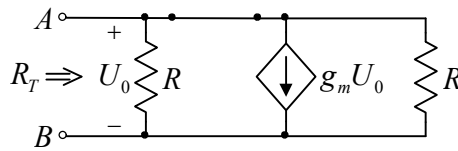
Slika 1.20a

$$U_T = U_{OV} = U_0.$$

Napon U_0 je izračunat pod tačkom **a)** ovog zadatka, tako da je:

$$U_T = U_{OV} = U_0 = 2\text{V}.$$

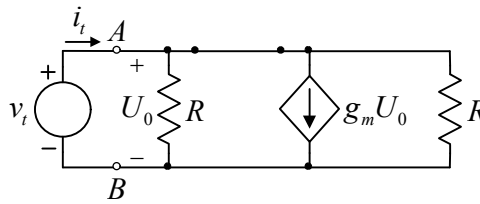
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje kao ekvivalentna otpornost između tačaka A i B , za kolo sa slike 1.20b:



Slika 1.20b

Pošto u kolu sa slike 1.20b postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.20c kao:

$$R_T = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.20c

Za kolo sa slike 1.20c se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor A , u kojoj su struje kroz odgovarajuće otpornike izražene preko Omovog zakona:

$$i_t = \frac{U_0}{R} + g_m U_0 + \frac{U_0}{R}.$$

Imajući u vidu da je $U_0 = v_t$, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

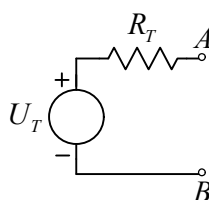
1. Električna kola stalnih struja

$$i_t = \frac{v_t}{R} + g_m v_t + \frac{v_t}{R},$$

tako da se dobija da je:

$$R_T = \frac{v_t}{i_t} = \frac{1}{\frac{2}{R} + g_m} = 200\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.20a), može se zaključiti da će traženi Thevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.20d:

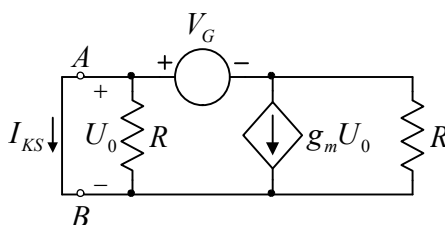


Slika 1.20d

c) Struja Nortonovog generatora I_N između tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B (nakon što se te dve tačke kratko spoje):

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.20e.



Slika 1.20e

Struja I_{KS} se može odrediti polazeći od jednačine po Kirhofovom zakonu za struje za čvor B , u kojoj su struje kroz odgovarajuće otpornike izražene preko Omovog zakona:

$$I_{KS} + \frac{U_0}{R} + g_m U_0 + \frac{U_0 - V_G}{R} = 0.$$

S obzirom da je $U_0 = 0$, jer su tačke A i B kratko spojene, iz prethodne jednačine se dobija:

$$I_{KS} = \frac{V_G}{R} = 10\text{mA}.$$

1. Električna kola stalnih struja

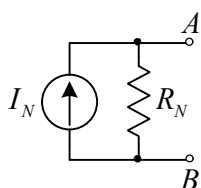
Stoga je:

$$I_N = I_{KS} = 10\text{mA}.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na isti način kao što je određena otpornost Tevenenovog generatora pod tačkom **b)** ovog zadatka, tako da je:

$$R_N = 200\Omega.$$

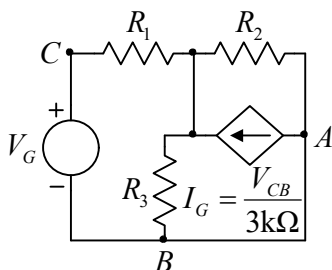
Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.20e), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.20f:



Slika 1.20f

1.21. Za kolo sa slike 1.21 je poznato da je $V_G = 3\text{V}$ i $R_1 = R_2 = R_3 = 10\text{k}\Omega$.

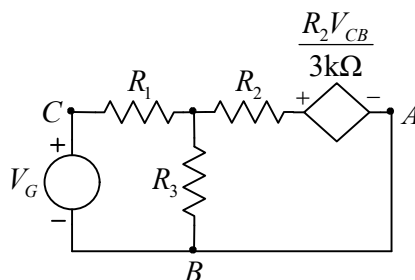
- a) Primeniti metod transformacije izvora na zavisni strujni generator I_G i otpornik R_2 .
- b) Primenom transformacije zvezde otpornika u trougao otpornika, odrediti struju kroz otpornik R_3 .
- c) Ako se kratak spoj između tačaka A i B ukloni iz kola, odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .
- d) Koristeći rezultat iz prethodne tačke odrediti struju koja protiče kroz kratak spoj između tačaka A i B , za kolo sa slike 1.21.
- e) Odrediti otpornost koju vidi idealni naponski generator V_G .



Slika 1.21

Rešenje:

a) Transformacijom paralelne veze zavisnog strujnog generatora I_G i otpornika R_2 u rednu vezu odgovarajućeg zavisnog naponskog generatora i otpornika R_2 , dobija se kolo prikazano na slici 1.21a:

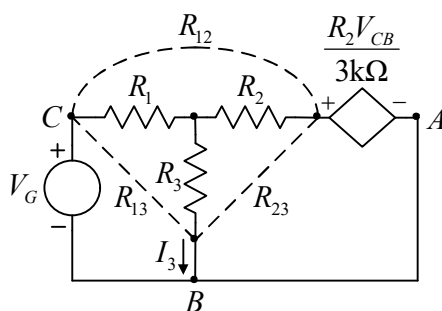


Slika 1.21a

Tom prilikom, napon zavisnog naponskog generatora je izračunat kao proizvod struje zavisnog strujnog generatora I_G i otpornosti otpornika R_2 :

$$I_G \cdot R_2 = \frac{R_2 V_{CB}}{3\text{k}\Omega}.$$

b) Pošto u postavci zadatka nije naveden referentni smer struje kroz otpornik R_3 koju je potrebno odrediti, taj referentni smer se može izabrati proizvoljno, i potom za taj proizvoljno izabrani referentni smer izračunati algebarska vrednost struje. Takođe, oznaka za traženu struju se može proizvoljno izabrati, s obzirom da u postavci zadatka nije navedena. Imajući to u vidu, tražena struja je označena sa I_3 , a referentni smer je usvojen kao što je to prikazano na slici 1.21b.



Slika 1.21b

Prema uslovu zadatka, zvezdu otpornika, koju sačinjavaju otpornici otpornosti R_1 , R_2 i R_3 , je potrebno transformisati u trougao otpornika koga će sačinjavati otpornici otpornosti R_{12} , R_{23} i R_{13} na pozicijama koje su označene isprekidanim linijama, kao što je to prikazano na slici 1.21b.

Otpornosti otpornika koji će sačinjavati trougao se izračunavaju prema sledećim formulama:

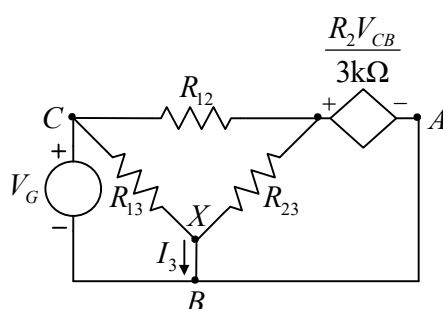
1. Električna kola stalnih struja

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = 30\text{k}\Omega,$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = 30\text{k}\Omega,$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} = 30\text{k}\Omega.$$

Na slici 1.21c je prikazan izgled kola, koje je nastalo od kola sa slike 1.21b, nakon što je izvršena opisana transformacija zvezde otpornika u trougao otpornika.



Slika 1.21c

Tražena struja I_3 se može odrediti polazeći od jednačine po Kirhofovom zakonu za struje za tačku X , u kojoj su struje kroz odgovarajuće otpornike izražene preko Omovog zakona:

$$I_3 = \frac{V_G}{R_{13}} + \frac{\frac{R_2 V_{CB}}{3\text{k}\Omega}}{R_{23}}.$$

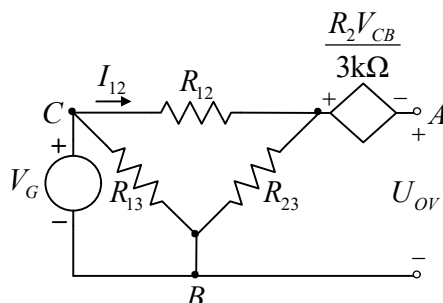
Sređivanjem prethodnog izraza i zamenom brojnih vrednosti, dobija se:

$$I_3 = \frac{V_G}{R_{13}} + \frac{\frac{R_2 V_{CB}}{3\text{k}\Omega}}{R_{23}} = \frac{V_G}{R_{13}} + \frac{R_2 V_G}{R_{23} \cdot 3\text{k}\Omega} = 0.1\text{mA} + 0.333\text{mA} = 0.433\text{mA}.$$

c) Ako se kratak spoj između tačaka A i B ukloni iz kola (po uslovu zadatka), za tako dobijeno kolo napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B (kao što je to prikazano na slici 1.21d). S obzirom da na desnom kraju zavisnog naponskog generatora postoji prekid, kroz granu sa zavisnim naponskim generatorom neće proticati struja, tako da će struja I_{12} (označena na slici 1.21d) proticati i kroz otpornik R_{12} i kroz otpornik R_{23} . Stoga se, na osnovu Omovog zakona za rednu vezu otpornika R_{12} i R_{23} , može pisati:

1. Električna kola stalnih struja

$$I_{12} = \frac{V_G}{R_{12} + R_{23}}.$$



Slika 1.21d

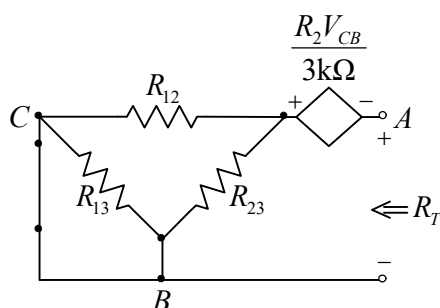
Sa druge strane, napon U_{OV} se može odrediti na sledeći način:

$$U_{OV} = R_{23} I_{12} - \frac{R_2 V_{CB}}{3\text{k}\Omega} = \frac{R_{23} V_G}{R_{12} + R_{23}} - \frac{R_2 V_{CB}}{3\text{k}\Omega},$$

tako da se, zamenom brojnih vrednosti, dobija da je:

$$U_T = U_{OV} = -8.5\text{V}.$$

Otpornost Thevenenovog generatora se određuje kao ekvivalentna otpornost između tačaka A i B , za kolo sa slike 1.21e:



Slika 1.21e

Pošto je u kolu sa slike 1.21e napon V_{CB} jednak nuli (jer su tačke C i B kratko spojene), napon zavisnog naponskog generatora će biti:

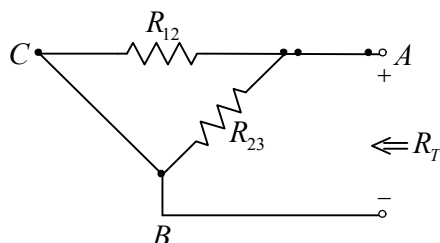
$$\frac{R_2 V_{CB}}{3\text{k}\Omega} = 0,$$

što znači da se zavisni naponski generator u kolu sa slike 1.21e može ekvivalentirati kratkim spojem. Pored toga, u kolu sa slike 1.21e se paralelna veza otpornika R_{13} i kratkog spoja kojim je zamenjen idealni naponski generator V_G , može ekvivalentirati kratkim spojem (jer je

1. Električna kola stalnih struja

ekvivalentna otpornost paralelne veze bilo kog otpornika i otpornika nulte otpornosti, jednaka nuli).

Imajući u vidu ove činjenice, šema za određivanje otpornosti Tevenenovog generatora se može predstaviti na način prikazan na slici 1.21f:

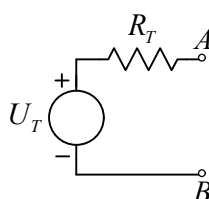


Slika 1.21f

Stoga je otpornost ekvivalentnog Tevenenovog generatora:

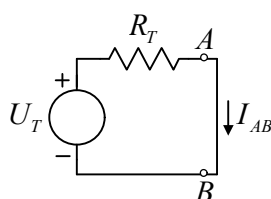
$$R_T = R_{12} \parallel R_{23} = 15\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.21d), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.21g:



Slika 1.21g

d) Kolo sa slike 1.21 se, korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, može predstaviti ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 1.21h:



Slika 1.21h

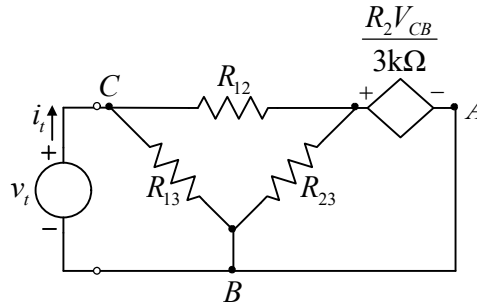
Struja I_{AB} (označena na slici 1.21h) se može odrediti pomoću Omovog zakona za otpornik R_T :

$$I_{AB} = \frac{U_T}{R_T} = -\frac{17}{30}\text{mA}.$$

1. Električna kola stalnih struja

e) Pošto u kolu sa slike 1.21c (koje je ekvivalentno kolu iz postavke zadatka) postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost koju vidi idealni naponski generator V_G se određuje na osnovu šeme sa slike 1.21i kao:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.21i

Za kolo sa slike 1.21i se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C, u kojoj su struje kroz odgovarajuće otpornike izražene preko Omovog zakona:

$$i_t = \frac{v_t}{R_{13}} + \frac{v_t - \frac{R_2 V_{CB}}{3k\Omega}}{R_{12}}.$$

Imajući u vidu da je $V_{CB} = v_t$, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_t = \frac{v_t}{R_{13}} + \frac{v_t - \frac{R_2 v_t}{3k\Omega}}{R_{12}} = v_t \cdot \left(\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{12}} - \frac{R_2}{R_{12} \cdot 3k\Omega} \right),$$

tako da se dobija da je:

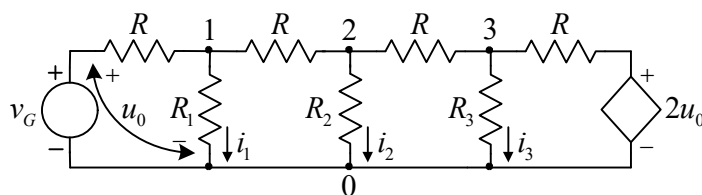
$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{1}{\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{12}} - \frac{R_2}{R_{12} \cdot 3k\Omega}} = -22.5k\Omega.$$

1.22. Za kolo sa slike 1.22 je poznato da je $R_n = 10k\Omega$, $n = 1, 2, 3$ i $4R \ll R_n$.

a) Ako se nezavisni naponski generator uključi u trenutku $t = 0$ tako da važi $v_G(t < 0) = 0$ i $v_G(t \geq 0) = 10V$, odrediti struje i_n , $n = 1, 2, 3$ nakon uključenja.

1. Električna kola stalnih struja

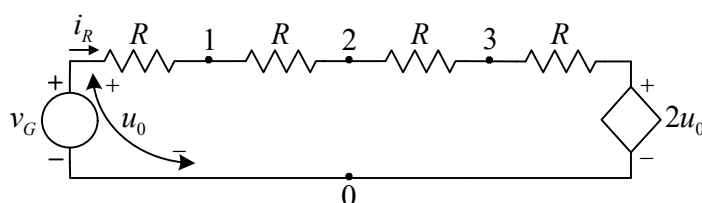
b) Ako se između čvorova 1 i 3 nalazi povezan kondenzator kapacitivnosti $C = 1\mu\text{F}$, kolika količina naelektrisanja protekne kroz njega nakon uključenja nezavisnog naponskog generatora?



Slika 1.22

Rešenje:

a) Imajući u vidu uslov zadatka, po kome je $4R \ll R_n$, može se zaključiti da će struje i_n , $n=1,2,3$ biti mnogo manje od struja koje protiču kroz otpornike otpornosti R . Zbog toga se struje i_n , $n=1,2,3$ mogu zanemariti u odnosu na struje koje protiču kroz otpornike otpornosti R , tako da se kolo iz postavke zadatka može aproksimirati kolom prikazanim na slici 1.22a



Slika 1.22a

Stoga se, na osnovu Omovog zakona za rednu vezu četiri otpornika otpornosti R , može pisati:

$$i_R = \frac{v_G - 2u_0}{4R}.$$

Na osnovu činjenice da je $u_0 = v_G$, sledi:

$$i_R = \frac{v_G - 2u_0}{4R} = \frac{v_G - 2v_G}{4R} = -\frac{v_G}{4R}.$$

Potencijali čvorova 1, 2 i 3 se mogu izračunati na sledeći način:

$$v_1 = v_G - Ri_R = v_G + R \cdot \frac{v_G}{4R} = \frac{5}{4}v_G,$$

$$v_2 = v_1 - Ri_R = \frac{5}{4}v_G + R \cdot \frac{v_G}{4R} = \frac{3}{2}v_G,$$

$$v_3 = v_2 - Ri_R = \frac{3}{2}v_G + R \cdot \frac{v_G}{4R} = \frac{7}{4}v_G.$$

1. Električna kola stalnih struja

Tražene struje i_n , $n=1,2,3$ nakon uključenja nezavisnog naponskog generatora se mogu odrediti primenom Omovog zakona za otpornike $R_n=10\text{k}\Omega$, $n=1,2,3$ u šemi sa slike 1.22:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{5v_G}{4R_1} = 1.25\text{mA},$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{3v_G}{2R_2} = 1.5\text{mA},$$

$$i_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{7v_G}{4R_3} = 1.75\text{mA}.$$

b) U kolu sa konstantnim strujama, u kojem je uspostavljeno stacionarno stanje, kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama. Zbog toga će i ekvivalentna šema kola iz postavke zadatka, u stacionarnom stanju (stanju koje nastupa dovoljno dugo vremena nakon uključenja ili isključenja generatora), kada se između čvorova 1 i 3 poveže kondenzator, imati isti izgled kao i šema sa slike 1.22.

Pre uključenja nezavisnog naponskog generatora, tj. za $t < 0$, je bilo $v_G = 0$, a time je i napon zavisnog naponskog generatora bio $2u_0 = 2v_G = 0$. To znači i da su sve struje i svi naponi u kolu bili jednaki nuli (jer u kolu nije postojao nijedan generator nenultog napona ili nenulte struje). Zbog toga je i napon na kondenzatoru povezanom između čvorova 1 i 3 bio:

$$u_{13}^{(1)} = 0,$$

tako da je količina naelektrisanja na tom kondenzatoru bila:

$$q^{(1)} = C \cdot u_{13}^{(1)} = 0.$$

Dovoljno dugo vremena nakon uključenja nezavisnog naponskog generatora (tj. nakon uspostavljanja novog stacionarnog stanja), napon na kondenzatoru povezanom između čvorova 1 i 3 će biti:

$$u_{13}^{(2)} = v_1 - v_3 = \frac{5}{4}v_G - \frac{7}{4}v_G = -\frac{1}{2}v_G = -5\text{V},$$

tako da će količina naelektrisanja na tom kondenzatoru biti:

$$q^{(2)} = C \cdot u_{13}^{(2)} = -5\mu\text{C}.$$

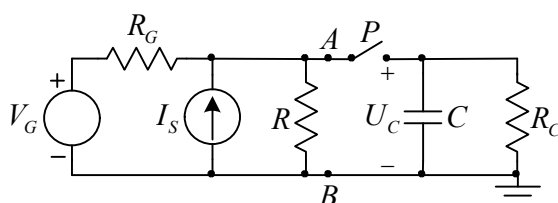
Tražena količina naelektrisanja koja protekne kroz kondenzator kapacitivnosti C nakon uključenja nezavisnog naponskog generatora je:

$$\Delta q = q^{(2)} - q^{(1)} = -5\mu\text{C}.$$

1. Električna kola stalnih struja

1.23. Za kolo sa slike 1.23 je poznato da je $R_G = R = 2\text{k}\Omega$, $R_C = 1\text{k}\Omega$, $V_G = 5\text{V}$ i $I_S = 3.5\text{mA}$.

- a) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B .
- b) Odrediti rastojanje d između ploča kondenzatora iz kola, ako je kapacitivnost kondenzatora $C = 1\text{nF}$, efektivna površina ploča kondenzatora $S = 250\text{mm}^2$, a $\varepsilon_r = 10$ i $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$.
- c) Kolika količina naelektrisanja Δq protekne kroz kondenzator i u kom smeru, kada se prekidač P zatvori?
- d) Ako je prekidač P dugo vremena bio zatvoren, i ako se nakon toga ploče kondenzatora iz kola razmaknu na rastojanje $2d$, kroz kondenzator protekne količina naelektrisanja $k\Delta q$. Odrediti vrednost parametra k i smer protoka naelektrisanja.



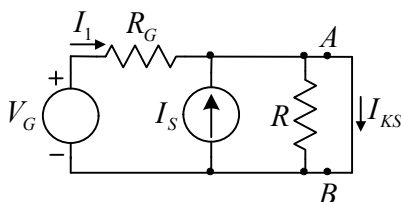
Slika 1.23

Rešenje:

- a) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.23a.



Slika 1.23a

S obzirom da su tačke A i B kratko spojene, napon na otporniku otpornosti R će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz taj otpornik neće proticati struja. Imajući to u vidu, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor A važi:

$$I_{KS} = I_1 + I_S.$$

Struja I_1 se može odrediti pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti R_G :

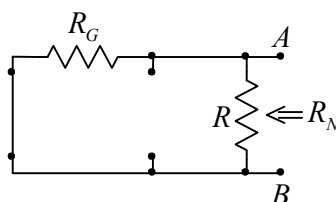
1. Električna kola stalnih struja

$$I_1 = \frac{V_G}{R_G}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$I_N = I_{KS} = \frac{V_G}{R_G} + I_S = 6\text{mA}.$$

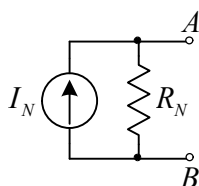
Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.23b:



Slika 1.23b

$$R_N = R_G \parallel R = 1\text{k}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.23a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.23c:



Slika 1.23c

b) Kapacitivnost kondenzatora C se može izraziti na sledeći način:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d},$$

odakle se dobija da je:

$$d = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{C} = 22.125\mu\text{m}.$$

c) U kolu sa konstantnim strujama, u kojem je uspostavljeno stacionarno stanje, kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama.

1. Električna kola stalnih struja

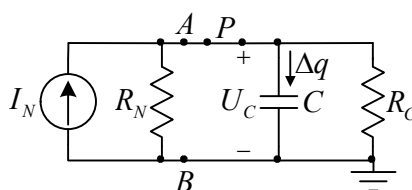
Imajući to u vidu, može se zaključiti da, kada je prekidač P otvoren, kroz otpornik otpornosti R_C ne protiče struja, jer na gornjem kraju otpornika otpornosti R_C postoji prekid. Zbog toga je na osnovu Omovog zakona:

$$U_C = 0,$$

tako da je količina naelektrisanja na kondenzatoru:

$$q_1 = C \cdot U_C = 0.$$

Nakon zatvaranja prekidača P , kolo iz postavke zadatka će moći da se predstavi ekvivalentnom šemom prikazanom na slici 1.23d:



Slika 1.23d

Dovoljno dugo vremena nakon zatvaranja prekidača P (tj. nakon uspostavljanja novog stacionarnog stanja), kondenzator će moći da se ekvivalentirata otvorenom vezom, tako da će na osnovu Omovog zakona za paralelnu vezu otpornika R_N i R_C , napon na kondenzatoru biti:

$$U_C = I_N \cdot (R_N \parallel R_C) = 3V,$$

što znači da će količina naelektrisanja na kondenzatoru iznositi:

$$q_2 = C \cdot U_C = 3nC.$$

Tražena količina naelektrisanja koja u smeru označenom na slici 1.23d protekne kroz kondenzator kapacitivnosti C nakon zatvaranja prekidača P je:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = 3nC.$$

d) Ako je prekidač P dugo vremena bio zatvoren, napon na krajevima kondenzatora kapacitivnosti C je (kao što je određeno u prethodnoj tački zadatka):

$$U_C = 3V,$$

dok je količina naelektrisanja na kondenzatoru:

$$q_2 = C \cdot U_C = 3nC.$$

Ako se ploče kondenzatora razmaknu na rastojanje $2d$, napon na krajevima kondenzatora će ostati nepromenjen, dok će se kapacitivnost kondenzatora promeniti na vrednost:

1. Električna kola stalnih struja

$$C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{2d} = 0.5 \text{ nF}.$$

Nakon toga će količina naelektrisanja na kondenzatoru biti:

$$q'_2 = C' \cdot U_C = 1.5 \text{ nC}.$$

Tražena količina naelektrisanja koja u smeru označenom na slici 1.23d protekne kroz kondenzator kapacitivnosti C nakon što se ploče kondenzatora iz kola razmaknu na rastojanje $2d$ je:

$$\Delta q' = q'_2 - q_2 = -1.5 \text{ nC}.$$

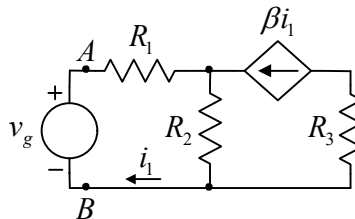
S obzirom da je po uslovu zadatka:

$$\Delta q' = k \Delta q,$$

dobija se da je (za smer protoka naelektrisanja označen na slici 1.23d):

$$k = \frac{\Delta q'}{\Delta q} = \frac{-1.5 \text{ nC}}{3 \text{ nC}} = -\frac{1}{2}.$$

1.24. Za kolo sa slike 1.24 je poznato R_1 , R_2 , R_3 i β . Odrediti ekvivalentnu otpornost za deo kola desno od tačaka A i B .

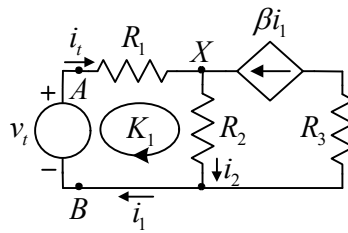


Slika 1.24

Rešenje:

Pošto u kolu sa slike 1.24 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.24a kao:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.24a

Za kolo sa slike 1.24a se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.24a) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$v_t - i_t R_1 - i_2 R_2 = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.24a se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , koja glasi:

$$i_t + \beta i_1 = i_2.$$

Imajući u vidu da je $i_1 = i_t$, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_2 = (\beta + 1) i_t,$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_2 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 dobija da je:

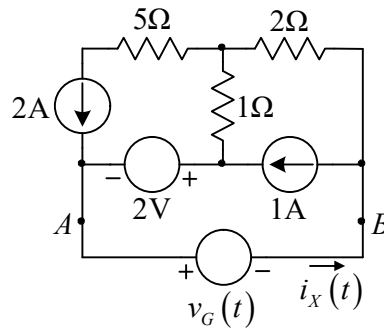
$$v_t - i_t R_1 - (\beta + 1) i_t R_2 = 0.$$

Konačno, tražena ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B je:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t} = R_1 + (\beta + 1) R_2.$$

1.25. a) Za kolo sa slike 1.25 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola iznad tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti struju $i_X(t)$, ako je poznato da je $v_G(t) = 6V \cdot \sin(\omega t)$.

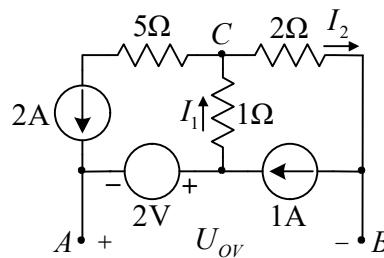


Slika 1.25

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola iznad tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola iznad tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.25a:

$$U_T = U_{OV}.$$



Slika 1.25a

Napon U_{OV} (označen na slici 1.25a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_T = U_{OV} = I_2 \cdot 2\Omega + I_1 \cdot 1\Omega - 2V.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_2 = 1A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

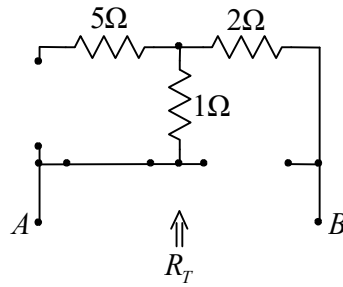
$$I_1 = I_2 + 2A = 3A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_T = U_{OV} = 3V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.25b:

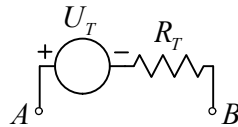
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.25b

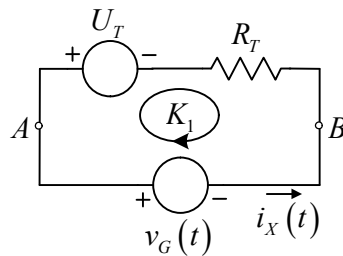
$$R_T = 1\Omega + 2\Omega = 3\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.25a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.25c:



Slika 1.25c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.25d:



Slika 1.25d

Za kolo sa slike 1.25d se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.25d) u kojoj je napon na otporniku R_T izražen preko Omovog zakona:

$$v_G(t) - U_T + i_X(t) \cdot R_T = 0,$$

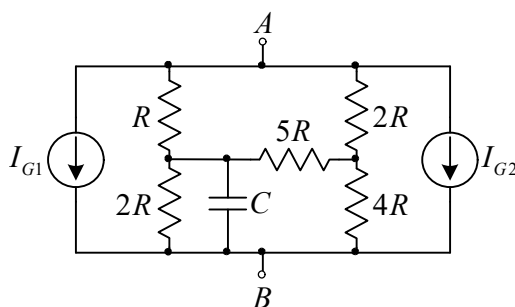
odakle se dobija da je:

$$i_X(t) = \frac{U_T - v_G(t)}{R_T} = 1\text{A} - 2\text{A} \cdot \sin(\omega t).$$

1. Električna kola stalnih struja

1.26. Smatrajući da idealni strujni generatori u kolu sa slike 1.26 generišu konstantne struje, i da su R , C , I_{G1} i I_{G2} poznate veličine, odrediti:

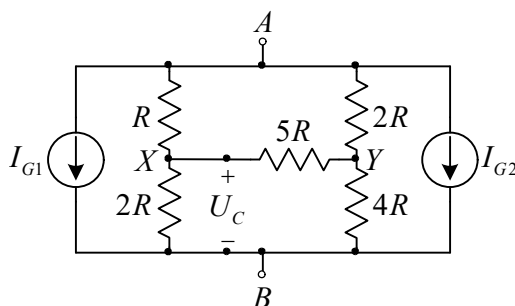
- a) napon U_{AB} ,
- b) ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B ,
- c) snagu koju predaje idealni strujni generator I_{G1} ,
- d) snagu koja se disipira na otporniku otpornosti $5R$,
- e) količinu naelektrisanja na kondenzatoru C ,
- f) kolika treba da bude otpornost potrošača R_p , koji bi se povezao između tačaka A i B , tako da se na njemu disipira maksimalna moguća snaga.



Slika 1.26

Rešenje:

a) U kolu sa konstantnim strujama, u kojem je uspostavljeno stacionarno stanje, kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama. Zbog toga se kolo iz postavke zadatka može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.26a:



Slika 1.26a

Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da je odnos otpornosti otpornika povezanog između čvorova A i X i otpornika povezanog između čvorova X i B jednak odnosu otpornosti otpornika povezanog između čvorova A i Y i otpornika povezanog između čvorova Y i B :

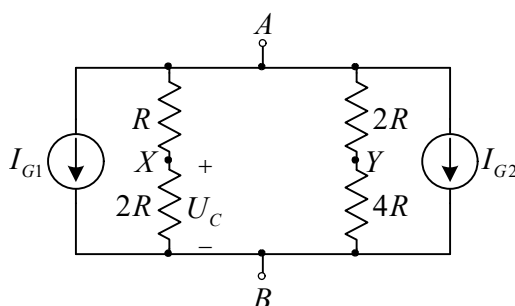
1. Električna kola stalnih struja

$$\frac{R}{2R} = \frac{2R}{4R},$$

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između čvorova A i B , potencijal čvora X biti jednak potencijalu čvora Y (tj. otpornički most će biti u ravnoteži). Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za otpornik otpornosti $5R$) i da će struja kroz taj otpornik biti jednaka nuli, koliki god da je napon između čvorova A i B .

To znači da se otpornik otpornosti $5R$ može zameniti bilo kratkim spojem (jer je napon na njegovim krajevima jednak nuli), bilo otvorenom vezom (jer je struja kroz taj otpornik jednaka nuli), tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo.

Ukoliko se otpornik otpornosti $5R$ zameni otvorenom vezom, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.26b:

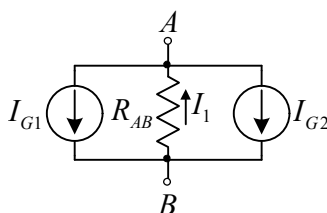


Slika 1.26b

Četiri otpornika u kolu sa slike 1.26b se mogu zameniti jednim ekvivalentnim otpornikom čija je otpornost:

$$R_{AB} = (R + 2R) \parallel (2R + 4R) = 3R \parallel 6R = 2R,$$

tako da se to kolo može ekvivalentirati kolom sa slike 1.26c:



Slika 1.26c

Prema Kirhofovom zakonu za struje za čvor B u kolu sa slike 1.26c, struja I_1 se može izraziti na sledeći način:

$$I_1 = I_{G1} + I_{G2},$$

tako da će po Omovom zakonu za otpornik otpornosti R_{AB} biti:

1. Električna kola stalnih struja

$$U_{AB} = -R_{AB} \cdot I_1 = -2R(I_{G1} + I_{G2}).$$

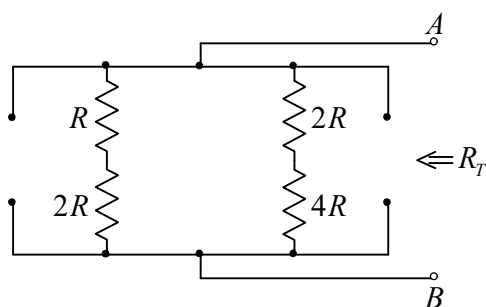
b) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$

S obzirom da je napon U_{AB} izračunat pod tačkom a) ovog zadatka, može se pisati:

$$U_T = U_{AB} = -2R(I_{G1} + I_{G2}).$$

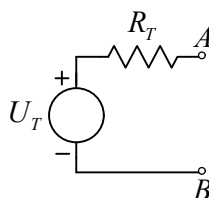
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.26d:



Slika 1.26d

$$R_T = (R + 2R) \parallel (2R + 4R) = 3R \parallel 6R = 2R.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.26e:



Slika 1.26e

c) Snaga koju predaje idealni strujni generator I_{G1} je:

$$P_{I_{G1}} = -U_{AB} \cdot I_{G1} = 2RI_{G1}(I_{G1} + I_{G2}).$$

d) S obzirom da je pod tačkom a) ovog zadatka zaključeno da je struja kroz otpornik otpornosti $5R$ jednaka nuli, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti $5R$ iznosi:

$$P_{5R} = 0.$$

e) Količina naelektrisanja na kondenzatoru C se može izračunati kao:

1. Električna kola stalnih struja

$$q = C \cdot U_C,$$

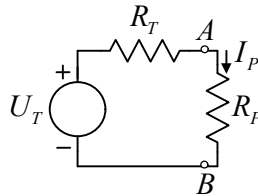
gde je U_C napon na krajevima kondenzatora kapacitivnosti C , koji se može izračunati na osnovu šeme sa slike 1.26b, primenom formule za razdelnik napona:

$$U_C = \frac{2R}{2R + R} \cdot U_{AB} = \frac{2}{3} U_{AB}.$$

Konačno se dobija da je:

$$q = C \cdot U_C = \frac{2}{3} U_{AB} \cdot C = -\frac{4}{3} RC (I_{G1} + I_{G2}).$$

f) Ako se između tačaka A i B poveže potrošač otpornosti R_p , a kolo iz postavke zadatka između tačaka A i B predstavi ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, dobija se kolo prikazano na slici 1.26f:



Slika 1.26f

Snaga koja se disipira na otporniku R_p se može izraziti na sledeći način:

$$P_{R_p} = I_p^2 \cdot R_p = \left(\frac{U_T}{R_T + R_p} \right)^2 \cdot R_p.$$

Otpornost R_p za koju je snaga P_{R_p} maksimalna se određuje iz uslova da je za tu vrednost R_p prvi izvod P_{R_p} po R_p jednak nuli:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = 0.$$

Dalje sledi:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = \frac{d}{dR_p} \left[\frac{U_T^2 \cdot R_p}{(R_T + R_p)^2} \right] = U_T^2 \cdot \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = U_T^2 \cdot \frac{R_T^2 - R_p^2}{(R_T + R_p)^4} = 0,$$

odakle se dobija da je:

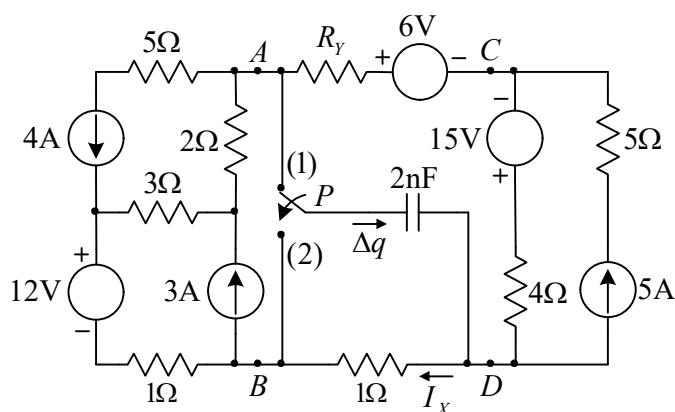
$$R_p = R_T = 2R.$$

1. Električna kola stalnih struja

1.27. Za kolo sa stalnim jednosmernim strujama sa slike 1.27 je poznato da je $R_Y = 3\Omega$.

Prekidač P se dovoljno dugo vremena nalazi u položaju (1). Odrediti:

- a) ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B ,
- b) ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola desno od tačaka C i D ,
- c) struju I_X ,
- d) snagu koja se disipira na otporniku R_Y ,
- e) snagu koju predaje idealni naponski generator napona $6V$,
- f) količinu naelektrisanja Δq koja protekne kroz kondenzator nakon što se prekidač P prebaci iz položaja (1) u položaj (2).

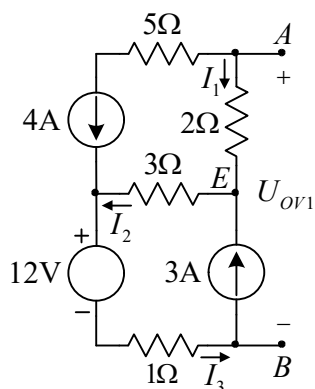


Slika 1.27

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.27a:

$$U_{T1} = U_{OV1}.$$



Slika 1.27a

1. Električna kola stalnih struja

Napon U_{ov1} (označen na slici 1.27a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T1} = U_{ov1} = I_3 \cdot 1\Omega + 12V + I_2 \cdot 3\Omega + I_1 \cdot 2\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$I_1 = -4A,$$

na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_3 = 3A,$$

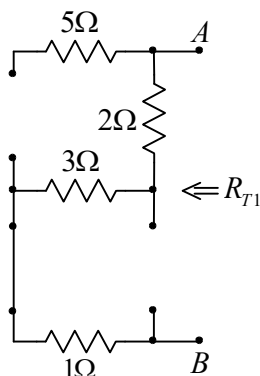
dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor E :

$$I_2 = I_1 + 3A = -1A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T1} = U_{ov1} = 4V.$$

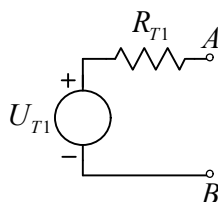
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.27b:



Slika 1.27b

$$R_{T1} = 2\Omega + 3\Omega + 1\Omega = 6\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov1} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.27a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.27c:

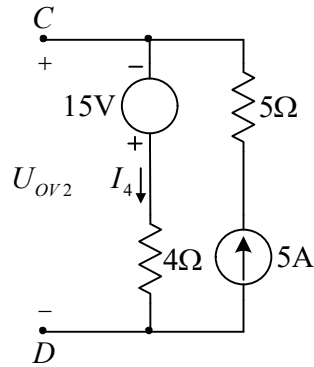


Slika 1.27c

1. Električna kola stalnih struja

b) Napon Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačaka C i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka C i D , nakon što se deo kola desno od tačaka C i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.27d:

$$U_{T2} = U_{OV2}.$$



Slika 1.27d

Napon U_{OV2} (označen na slici 1.27d) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T2} = U_{OV2} = I_4 \cdot 4\Omega - 15V.$$

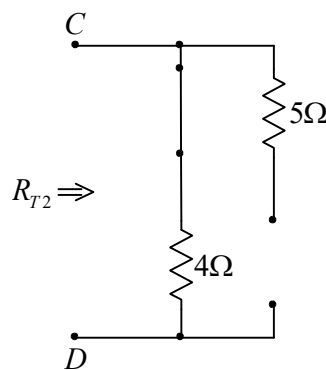
Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku D je:

$$I_4 = 5A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T2} = U_{OV2} = 5V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.27e:

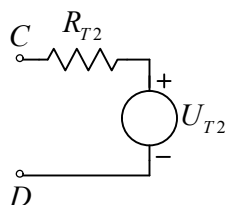


Slika 1.27e

$$R_{T2} = 4\Omega.$$

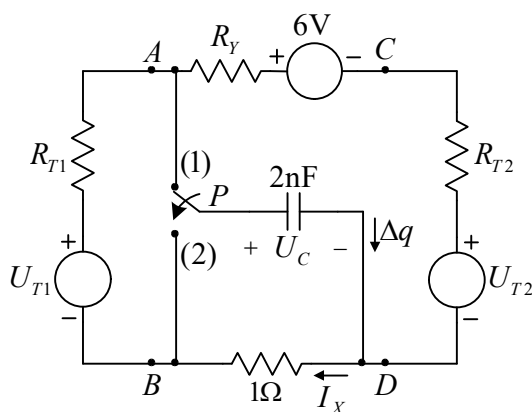
1. Električna kola stalnih struja

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov2} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.27d), može se zaključiti da će traženi Thevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.27f:



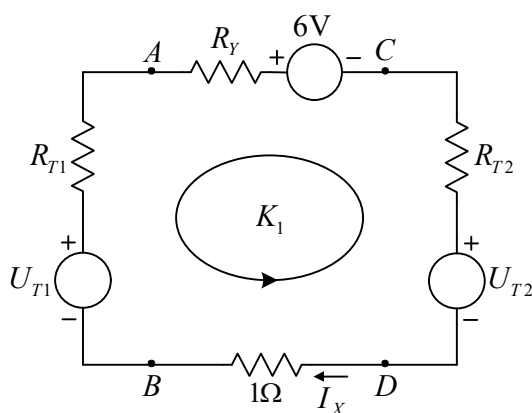
Slika 1.27f

c) Korišćenjem rezultata dobijenih u tačkama a) i b) ovog zadatka, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.27g:



Slika 1.27g

U kolu sa konstantnim strujama, u kojem je uspostavljeno stacionarno stanje, kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama. Imajući u vidu tu činjenicu, kolo sa slike 1.27g se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.27h:



Slika 1.27h

1. Električna kola stalnih struja

Za kolo sa slike 1.27h se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.27h) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$I_X \cdot 1\Omega + U_{T2} + I_X \cdot R_{T2} + 6V + I_X \cdot R_Y + I_X \cdot R_{T1} - U_{T1} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$I_X = \frac{U_{T1} - U_{T2} - 6V}{R_{T1} + R_{T2} + R_Y + 1\Omega} = -0.5A.$$

d) Snaga koja se disipira na otporniku R_Y je:

$$P_{R_Y} = I_X^2 \cdot R_Y = 0.75W.$$

e) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 6V iznosi:

$$P_{6V} = -I_X \cdot 6V = 3W.$$

f) Kada je prekidač P u položaju (1), napon na kondenzatoru (označen na slici 1.27g) se može izračunati na sledeći način:

$$U_C^{(1)} = U_{AD} = -I_X \cdot 1\Omega + U_{T1} - I_X \cdot R_{T1} = 7.5V,$$

tako da je tada količina naelektrisanja na kondenzatoru:

$$q^{(1)} = 2nF \cdot U_C^{(1)} = 15nC.$$

Kada je prekidač P u položaju (2), napon na kondenzatoru se može izračunati na sledeći način:

$$U_C^{(2)} = U_{BD} = -I_X \cdot 1\Omega = 0.5V,$$

tako da je tada količina naelektrisanja na kondenzatoru:

$$q^{(2)} = 2nF \cdot U_C^{(2)} = 1nC.$$

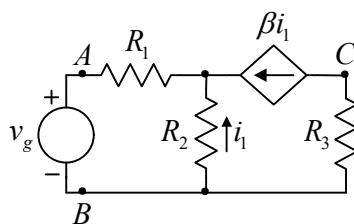
Tražena količina naelektrisanja Δq koja u smeru označenom na slici 1.27g protokne kroz kondenzator nakon što se prekidač P prebaci iz položaja (1) u položaj (2) je:

$$\Delta q = q^{(2)} - q^{(1)} = -14nC.$$

1.28. Za kolo sa slike 1.28 je poznato R_1 , R_2 , R_3 i β .

a) Odrediti ekvivalentnu otpornost za deo kola desno od tačaka A i B .

b) Odrediti odnos napona v_{cb} / v_g .

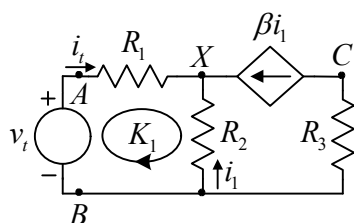


Slika 1.28

Rešenje:

a) Pošto u kolu sa slike 1.28 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.28a kao:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.28a

Za kolo sa slike 1.28a se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.28a) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$v_t - i_t R_1 + i_1 R_2 = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.28a se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , koja glasi:

$$i_t + \beta i_1 + i_1 = 0.$$

Prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_1 = -\frac{i_t}{\beta + 1},$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 dobija da je:

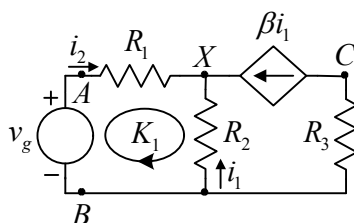
$$v_t - i_t R_1 - \frac{i_t R_2}{\beta + 1} = 0.$$

1. Električna kola stalnih struja

Konačno, tražena ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B je:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t} = R_1 + \frac{R_2}{\beta + 1}.$$

b) Za potrebe određivanja odnosa napona v_{cb} / v_g , na slici 1.28b je predstavljeno kolo iz postavke zadatka uz dodatak oznake za struju koja protiče kroz otpornik otpornosti R_1 (pri čemu su oznaka za tu struju i njen referentni smer proizvoljno usvojeni):



Slika 1.28b

Za kolo sa slike 1.28b se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.28b) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$v_g - i_2 R_1 + i_1 R_2 = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.28b se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , koja glasi:

$$i_2 + \beta i_1 + i_1 = 0.$$

Prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_2 = -i_1 (\beta + 1),$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_2 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 dobija da je:

$$v_g + i_1 (\beta + 1) R_1 + i_1 R_2 = 0,$$

što se može napisati i u sledećem obliku:

$$v_g = -i_1 ((\beta + 1) R_1 + R_2).$$

Napon v_{cb} se može izraziti pomoću Omovog zakona za otpornik R_3 :

$$v_{cb} = -\beta i_1 R_3,$$

odakle je:

1. Električna kola stalnih struja

$$i_1 = -\frac{v_{cb}}{\beta R_3}.$$

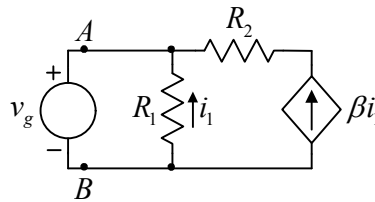
Uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u prethodno izvedeni izraz za napon v_g dobija se da je:

$$v_g = \frac{v_{cb}}{\beta R_3} ((\beta + 1) R_1 + R_2).$$

Konačno, traženi odnos napona v_{cb} / v_g je:

$$\frac{v_{cb}}{v_g} = \frac{\beta R_3}{(\beta + 1) R_1 + R_2}.$$

1.29. Za kolo sa slike 1.29 je poznato R_1 , R_2 i β . Odrediti ekvivalentnu otpornost za deo kola desno od tačaka A i B .

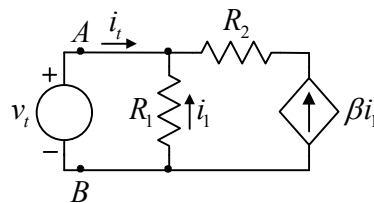


Slika 1.29

Rešenje:

Pošto u kolu sa slike 1.29 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.29a kao:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.29a

Za kolo sa slike 1.29a se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor A , koja glasi:

1. Električna kola stalnih struja

$$i_t + \beta i_1 + i_1 = 0.$$

Prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_1 = -\frac{i_t}{\beta + 1}.$$

Pored toga, struja i_1 se može predstaviti i preko Omovog zakona za otpornik otpornosti R_1 :

$$i_1 = -\frac{v_t}{R_1}.$$

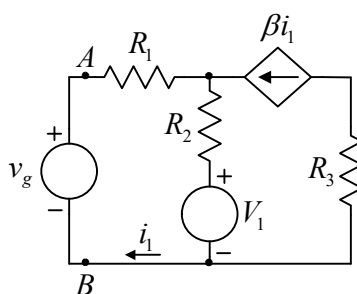
Izjednačavanjem prethodna dva izraza za struju i_1 se dobija:

$$-\frac{i_t}{\beta + 1} = -\frac{v_t}{R_1},$$

odakle sledi da je tražena ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B :

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{R_1}{\beta + 1}.$$

1.30. Za kolo sa slike 1.30 je poznato R_1 , R_2 , R_3 , V_1 i β . Odrediti ekvivalentnu otpornost za deo kola desno od tačaka A i B .



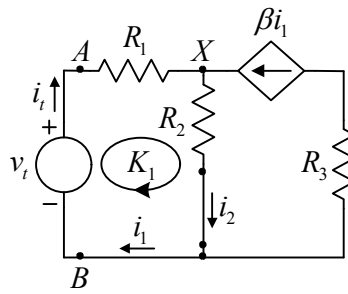
Slika 1.30

Rešenje:

Pošto u kolu sa slike 1.30 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.30a kao:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t}.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.30a

Za kolo sa slike 1.30a se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.30a) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$v_t - i_t R_1 - i_2 R_2 = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.30a se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , koja glasi:

$$i_t + \beta i_1 = i_2.$$

Imajući u vidu da je $i_1 = i_t$, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_2 = (\beta + 1) i_t,$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_2 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 dobija da je:

$$v_t - i_t R_1 - (\beta + 1) i_t R_2 = 0.$$

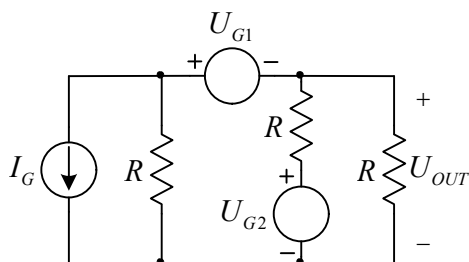
Konačno, tražena ekvivalentna otpornost za deo kola desno od tačaka A i B je:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t} = R_1 + (\beta + 1) R_2.$$

1.31. Za kolo sa slike 1.31 je poznato: I_G , U_{G1} , U_{G2} i R .

a) Primenom principa superpozicije odrediti napon U_{OUT} .

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koju predaje idealni strujni generator I_G .



Slika 1.31

Rešenje:

a) Napon U_{OUT} se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente U'_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_G (dok su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani), komponente U''_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G1} (dok su idealni strujni generator I_G i idealni naponski generator U_{G2} anulirani) i komponente U'''_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G2} (dok su idealni strujni generator I_G i idealni naponski generator U_{G1} anulirani):

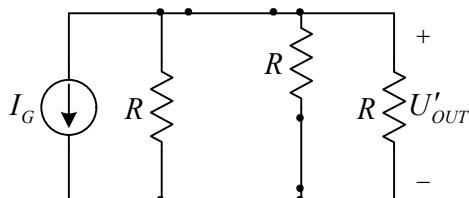
$$U_{OUT} = U'_{OUT} + U''_{OUT} + U'''_{OUT},$$

$$U'_{OUT} = U_{OUT}(I_G \neq 0, U_{G1} = 0, U_{G2} = 0),$$

$$U''_{OUT} = U_{OUT}(I_G = 0, U_{G1} \neq 0, U_{G2} = 0),$$

$$U'''_{OUT} = U_{OUT}(I_G = 0, U_{G1} = 0, U_{G2} \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta U'_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.31a (u kom su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani tako što su zamenjeni kratkim spojevima) pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost paralelne veze tri otpornika R :

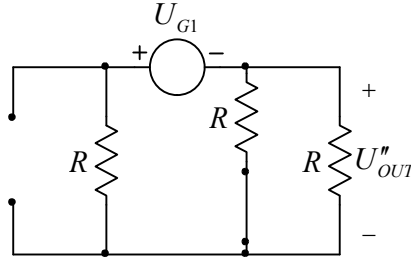


Slika 1.31a

$$U'_{OUT} = -(R \parallel R \parallel R) \cdot I_G = -\frac{1}{3} R \cdot I_G.$$

1. Električna kola stalnih struja

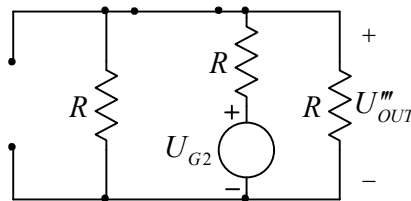
Superpoziciona komponenta U''_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.31b (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator U_{G2} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:



Slika 1.31b

$$U''_{OUT} = -\frac{R \parallel R}{R + (R \parallel R)} \cdot U_{G1} = -\frac{1}{3} U_{G1}.$$

Superpoziciona komponenta U'''_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.31c (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator U_{G1} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:



Slika 1.31c

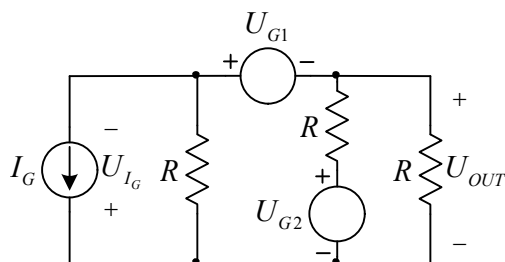
$$U'''_{OUT} = \frac{R \parallel R}{R + (R \parallel R)} \cdot U_{G2} = \frac{1}{3} U_{G2}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$U_{OUT} = U'_{OUT} + U''_{OUT} + U'''_{OUT} = -\frac{1}{3} R \cdot I_G - \frac{1}{3} U_{G1} + \frac{1}{3} U_{G2}.$$

b) Napon U_{I_G} na idealnom strujnom generatoru I_G , koji ima usaglašen referentni smer za predaju snage sa referentnim smerom struje I_G , je označen na slici 1.31d.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.31d

Napon U_{I_G} se može odrediti na sledeći način:

$$U_{I_G} = -U_{G1} - U_{OUT} = \frac{1}{3}R \cdot I_G - \frac{2}{3}U_{G1} - \frac{1}{3}U_{G2}.$$

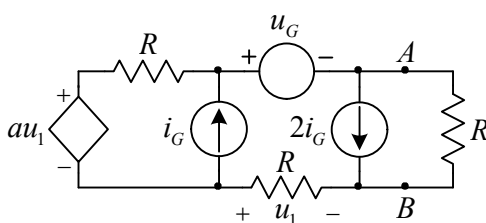
Snaga P_{I_G} koju predaje idealni strujni generator I_G je:

$$P_{I_G} = U_{I_G} \cdot I_G = \frac{1}{3}R \cdot I_G^2 - \frac{2}{3}U_{G1} \cdot I_G - \frac{1}{3}U_{G2} \cdot I_G.$$

1.32. Za kolo sa slike 1.32 je poznato: i_G , u_G , a i R .

a) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti R koji se nalazi desno od tačaka A i B .



Slika 1.32

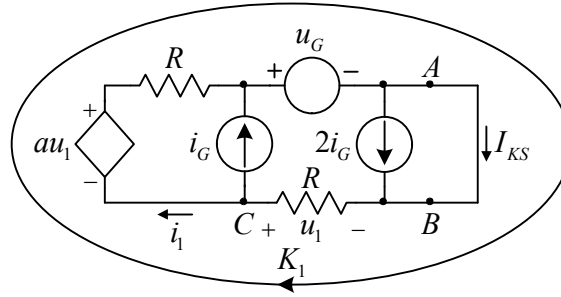
Rešenje:

a) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.32a.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.32a

Za kolo sa slike 1.32a se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj je napon na odgovarajućem otporniku otpornosti R izražen preko Omovog zakona, glasi:

$$u_1 + au_1 - i_1 R - u_G = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C , u kojoj je struja kroz odgovarajući otpornik otpornosti R izražena preko Omovog zakona, glasi:

$$i_1 = -\frac{u_1}{R} - i_G,$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 dobija da je:

$$u_1 + au_1 + u_1 + i_G R - u_G = 0,$$

odakle se može izraziti napon u_1 na sledeći način:

$$u_1 = \frac{u_G - i_G R}{a + 2}.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za tačku B , u kojoj je struja kroz odgovarajući otpornik otpornosti R izražena preko Omovog zakona, glasi:

$$I_{KS} = -\frac{u_1}{R} - 2i_G.$$

Ako se u poslednju jednačinu uvrsti izraz za napon u_1 , dobija se:

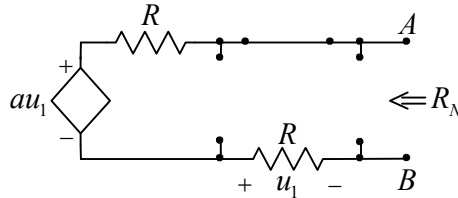
$$I_{KS} = -\frac{u_G - i_G R}{(a + 2)R} - 2i_G,$$

tako da je konačno:

1. Električna kola stalnih struja

$$I_N = I_{KS} = -\frac{u_G - i_G R}{(a+2)R} - 2i_G = -\frac{u_G + (2a+3)Ri_G}{(a+2)R}.$$

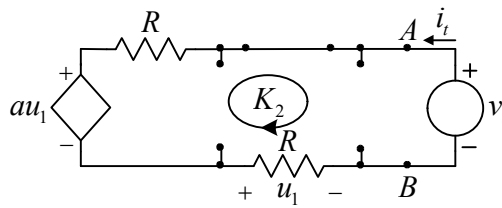
Otpornost Nortonovog generatora se određuje kao ekvivalentna otpornost između tačaka A i B , za kolo sa slike 1.32b:



Slika 1.32b

Pošto u kolu sa slike 1.32b postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.32c kao:

$$R_N = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.32c

Za kolo sa slike 1.32c se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_2 (za smer obilaska konture označen na slici 1.32c) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$-v_t + i_t R + au_1 + i_t R = 0.$$

Napon u_1 se, preko Omovog zakona za odgovarajući otpornik otpornosti R , može predstaviti na sledeći način:

$$u_1 = i_t R,$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za napon u_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_2 dobija da je:

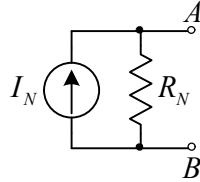
$$v_t = i_t R + ai_t R + i_t R = (a+2)i_t R.$$

Konačno, otpornost Nortonovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B je:

1. Električna kola stalnih struja

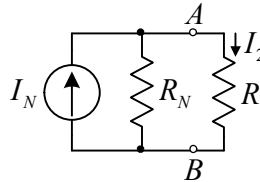
$$R_N = \frac{v_i}{i_i} = (a+2)R.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.32a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.32d:



Slika 1.32d

b) Kolo sa slike 1.32 se, korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, može predstaviti ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 1.32e:



Slika 1.32e

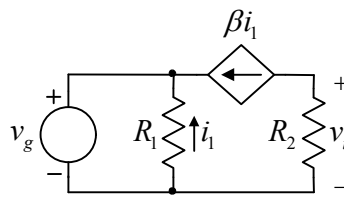
Struja I_2 (označena na slici 1.32e) se može odrediti pomoću formule za strujni razdelnik:

$$I_2 = \frac{R_N}{R_N + R} \cdot I_N.$$

Konačno, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti R koji se nalazi desno od tačaka A i B , se može izračunati na sledeći način:

$$P = I_2^2 \cdot R = \left(\frac{R_N}{R_N + R} I_N \right)^2 R = \left(\frac{a+2}{a+3} I_N \right)^2 R = \left(\frac{u_G + (2a+3)Ri_G}{(a+3)R} \right)^2 R.$$

1.33. Za kolo sa slike 1.33 je poznato R_1 , R_2 i β . Odrediti odnos napona v_i / v_g .



Slika 1.33

Rešenje:

Napon v_i se može izraziti pomoću Omovog zakona za otpornik R_2 :

$$v_i = -\beta i_1 R_2 .$$

Struja i_1 se može izraziti pomoću Omovog zakona za otpornik R_1 :

$$i_1 = -\frac{v_g}{R_1} .$$

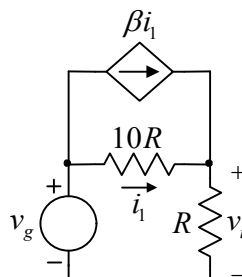
Uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u prethodno izvedeni izraz za napon v_i dobija se da je:

$$v_i = \beta \frac{v_g}{R_1} R_2 .$$

Konačno, traženi odnos napona v_i / v_g je:

$$\frac{v_i}{v_g} = \beta \frac{R_2}{R_1} .$$

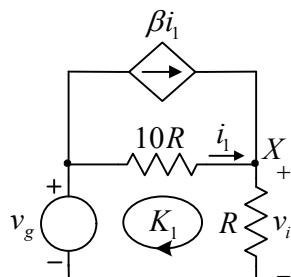
1.34. Za kolo sa slike 1.34 je poznato R i β . Odrediti odnos napona v_i / v_g .



Slika 1.34

Rešenje:

Za potrebe određivanja odnosa napona v_i / v_g , na slici 1.34a je predstavljeno kolo iz postavke zadatka uz dodatak oznake X za čvor na desnom kraju grane sa otpornikom otpornosti $10R$:



Slika 1.34a

Za kolo sa slike 1.34a se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.34a) u kojoj je napon na otporniku otpornosti $10R$ izražen preko Omovog zakona:

$$v_g - i_1 \cdot 10R - v_i = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.34a se može napisati i sledeća jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , u kojoj je struja kroz otpornik otpornosti R izražena preko Omovog zakona:

$$\beta i_1 + i_1 - \frac{v_i}{R} = 0.$$

Iz prethodne jednačine se može izraziti struja i_1 na sledeći način:

$$i_1 = \frac{v_i}{(\beta + 1)R},$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 dobija da je:

$$v_g - \frac{10v_i}{\beta + 1} - v_i = 0,$$

što se može napisati i u sledećem obliku:

$$v_g = \frac{10v_i}{\beta + 1} + v_i = \frac{\beta + 11}{\beta + 1} v_i.$$

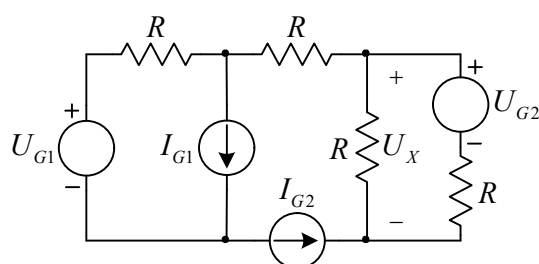
Konačno, traženi odnos napona v_i / v_g je:

$$\frac{v_i}{v_g} = \frac{\beta + 1}{\beta + 11}.$$

1.35. Za kolo sa slike 1.35 je poznato: I_{G1} , I_{G2} , U_{G1} , U_{G2} i R .

a) Primenom principa superpozicije odrediti napon U_X .

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti R koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom U_{G2} .



Slika 1.35

Rešenje:

a) Napon U_X se može predstaviti kao zbir četiri superpozicione komponente i to: komponente U'_X koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_{G1} (dok su idealni strujni generator I_{G2} i idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani), komponente U''_X koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_{G2} (dok su idealni strujni generator I_{G1} i idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani), komponente U'''_X koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G1} (dok su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} i idealni naponski generator U_{G2} anulirani) i komponente U''''_X koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G2} (dok su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} i idealni naponski generator U_{G1} anulirani):

$$U_X = U'_X + U''_X + U'''_X + U''''_X,$$

$$U'_X = U_X(I_{G1} \neq 0, I_{G2} = 0, U_{G1} = 0, U_{G2} = 0),$$

$$U''_X = U_X(I_{G1} = 0, I_{G2} \neq 0, U_{G1} = 0, U_{G2} = 0),$$

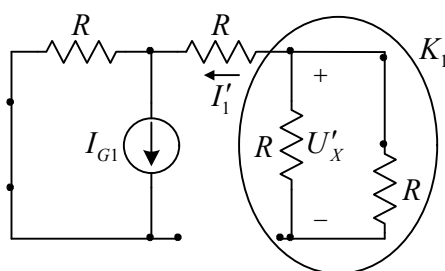
$$U'''_X = U_X(I_{G1} = 0, I_{G2} = 0, U_{G1} \neq 0, U_{G2} = 0),$$

$$U''''_X = U_X(I_{G1} = 0, I_{G2} = 0, U_{G1} = 0, U_{G2} \neq 0).$$

1. Električna kola stalnih struja

Superpoziciona komponenta U'_X se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.35a (u kom je idealni strujni generator I_{G2} anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, dok su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani tako što su zamenjeni kratkim spojevima). U tom kolu, struja I'_1 se može odrediti pomoću Kirhofovog zakona za struje za konturu K_1 prikazanu na slici 1.35a. Naime, po Kirhofovom zakonu za struje, suma algebarskih vrednosti struja svih grana koje ulaze u konturu K_1 mora biti jednaka nuli. Pošto samo grana kroz koju protiče struja I'_1 ulazi u konturu K_1 , sledi da mora biti:

$$I'_1 = 0.$$



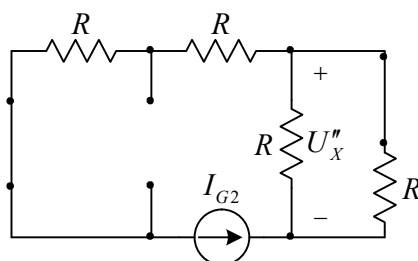
Slika 1.35a

To znači da se grana kroz koju protiče struja I'_1 može zameniti otvorenom vezom tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo. Iz toga se može zaključiti da kroz otpornike u delu kola koji je obuhvaćen konturom K_1 neće proticati struja, jer je taj deo kola potpuno glavanski izolovan od ostatka kola i uz to u njemu ne postoji nijedan generator. Na osnovu Omovog zakona za otpornike u delu kola koji je obuhvaćen konturom K_1 se može zaključiti da će napon na svakom od tih otpornika biti jednak nuli, pa će zbog toga biti i:

$$U'_X = 0.$$

Superpoziciona komponenta U''_X se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.35b (u kom je idealni strujni generator I_{G1} anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, dok su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani tako što su zamenjeni kratkim spojevima), pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost paralelne veze dva vertikalno postavljena otpornika otpornosti R :

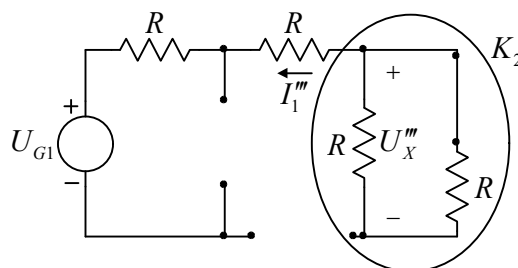
$$U''_X = -(R \parallel R) \cdot I_{G2} = -\frac{1}{2} R I_{G2}.$$



Slika 1.35b

Superpoziciona komponenta U_X''' se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.35c (u kom su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} anulirani tako što su zamenjeni otvorenim vezama, a idealni naponski generator U_{G2} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem). U tom kolu, struja I_1''' se može odrediti pomoću Kirhofovog zakona za struje za konturu K_2 prikazanu na slici 1.35c. Naime, po Kirhofovom zakonu za struje, suma algebarskih vrednosti struja svih grana koje ulaze u konturu K_2 mora biti jednaka nuli. Pošto samo grana kroz koju protiče struja I_1''' ulazi u konturu K_2 , sledi da mora biti:

$$I_1''' = 0.$$



Slika 1.35c

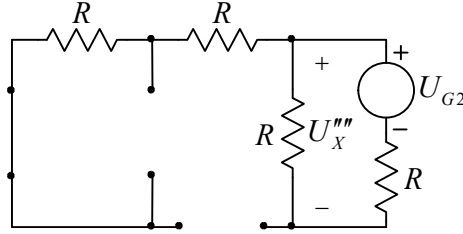
To znači da se grana kroz koju protiče struja I_1''' može zameniti otvorenom vezom tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo. Iz toga se može zaključiti da kroz otpornike u delu kola koji je obuhvaćen konturom K_2 neće proticati struja, jer je taj deo kola potpuno glavanski izolovan od ostatka kola i uz to u njemu ne postoji nijedan generator. Na osnovu Omovog zakona za otpornike u delu kola koji je obuhvaćen konturom K_2 se može zaključiti da će napon na svakom od tih otpornika biti jednak nuli, pa će zbog toga biti i:

$$U_X''' = 0.$$

Superpoziciona komponenta U_X'''' se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.35d (u kom su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} anulirani tako što su zamenjeni otvorenim vezama, a

1. Električna kola stalnih struja

idealni naponski generator U_{G1} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:



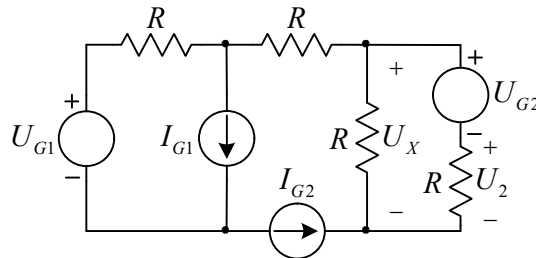
Slika 1.35d

$$U_X''' = \frac{R}{R+R} \cdot U_{G2} = \frac{1}{2} U_{G2}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$U_X = U_X' + U_X'' + U_X''' + U_X'''' = -\frac{1}{2} R I_{G2} + \frac{1}{2} U_{G2}.$$

b) Napon U_2 na otporniku otpornosti R koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom U_{G2} , je označen na slici 1.35e.



Slika 1.35e

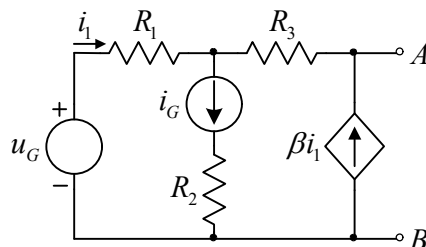
Napon U_2 se može odrediti na sledeći način:

$$U_2 = U_X - U_{G2} = -\frac{1}{2} R I_{G2} - \frac{1}{2} U_{G2}.$$

Snaga P koja se disipira na otporniku otpornosti R koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom U_{G2} je:

$$P = \frac{U_2^2}{R} = \frac{(U_{G2} + R I_{G2})^2}{4R}.$$

1.36. Za kolo sa slike 1.36 je poznato R_1 , R_2 , R_3 , u_G , i_G i β . Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B .

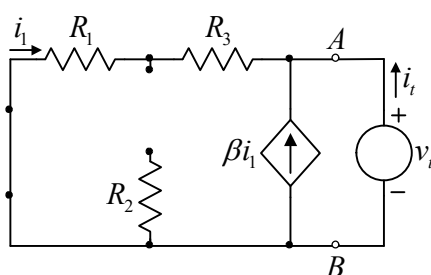


Slika 1.36

Rešenje:

Pošto u kolu sa slike 1.36 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.36a kao:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t}.$$



Slika 1.36a

Za kolo sa slike 1.36a se može napisati jednačina po Omovom zakonu za rednu vezu otpornika otpornosti R_1 i R_3 :

$$v_t = -i_1(R_1 + R_3).$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.36a se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor A , koja glasi:

$$i_t + \beta i_1 + i_1 = 0.$$

Prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$i_1 = -\frac{i_t}{\beta + 1},$$

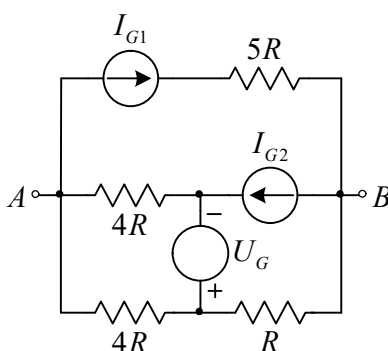
tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u već napisanu jednačinu po Omovom zakonu za rednu vezu otpornika otpornosti R_1 i R_3 , dobija da je:

$$v_t = i_t \cdot \frac{R_1 + R_3}{\beta + 1}.$$

Konačno, tražena ekvivalentna otpornost između tačaka A i B je:

$$R_{EKV} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{R_1 + R_3}{\beta + 1}.$$

1.37. Za kolo sa slike 1.37 je poznato: U_G , I_{G1} , I_{G2} i R . Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B . Tom prilikom, napon Tevenenovog generatora odrediti primenom principa superpozicije.



Slika 1.37

Rešenje:

Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$

Napon U_{AB} se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente U'_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_G (dok su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} anulirani), komponente U''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_{G1} (dok su idealni naponski generator U_G i idealni strujni generator I_{G2} anulirani) i komponente U'''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_{G2} (dok su idealni naponski generator U_G i idealni strujni generator I_{G1} anulirani):

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} + U'''_{AB},$$

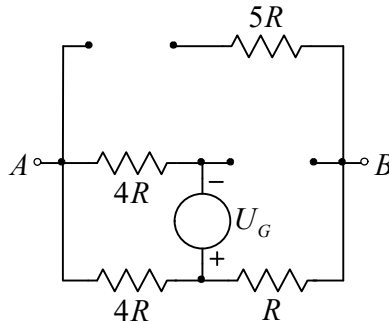
$$U'_{AB} = U_{AB}(U_G \neq 0, I_{G1} = 0, I_{G2} = 0),$$

1. Električna kola stalnih struja

$$U''_{AB} = U_{AB}(U_G = 0, I_{G1} \neq 0, I_{G2} = 0),$$

$$U'''_{AB} = U_{AB}(U_G = 0, I_{G1} = 0, I_{G2} \neq 0).$$

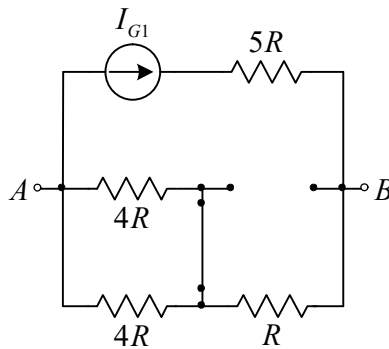
Superpoziciona komponenta U'_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.37a (u kom su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} anulirani tako što su zamenjeni otvorenim vezama) primenom formule za razdelnik napona (imajući u vidu da kroz otpornik otpornosti R ne protiče struja, jer na jednom kraju grane u kojoj se nalazi taj otpornik postoji prekid, tako da će po Omovom zakonu napon na tom otporniku biti jednak nuli):



Slika 1.37a

$$U'_{AB} = -\frac{4R}{4R + 4R} \cdot U_G = -\frac{1}{2}U_G.$$

Superpoziciona komponenta U''_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.37b (u kom je idealni naponski generator U_G anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem, a idealni strujni generator I_{G2} anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom) pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost mreže otpornika R , $4R$ i $4R$:

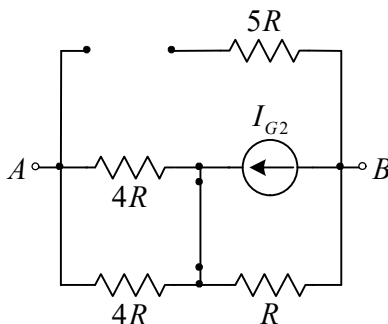


Slika 1.37b

$$U''_{AB} = -(R + (4R \parallel 4R)) \cdot I_{G1} = -3R \cdot I_{G1}.$$

1. Električna kola stalnih struja

Superpoziciona komponenta U_{AB}''' se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.37c (u kom je idealni naponski generator U_G anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem, a idealni strujni generator I_{G1} anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom) pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti R (imajući u vidu da kroz paralelnu vezu dva otpornika otpornosti $4R$ ne protiče struja, jer na levom kraju te paralelne veze postoji prekid, tako da će po Omovom zakonu napon na toj paralelnoj vezi otpornika biti jednak nuli):



Slika 1.37c

$$U_{AB}''' = R \cdot I_{G2}.$$

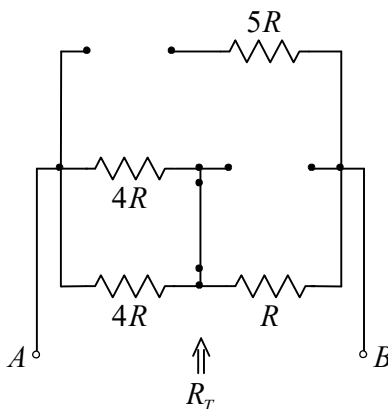
Konačno, dobija se da je:

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} + U'''_{AB} = -\frac{1}{2}U_G - 3R \cdot I_{G1} + R \cdot I_{G2},$$

tako da je napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B :

$$U_T = -\frac{1}{2}U_G - 3R \cdot I_{G1} + R \cdot I_{G2}.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.37d:

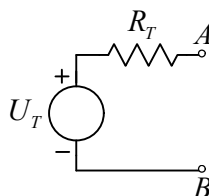


Slika 1.37d

1. Električna kola stalnih struja

$$R_T = R + (4R \parallel 4R) = R + 2R = 3R.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Thevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.37e:

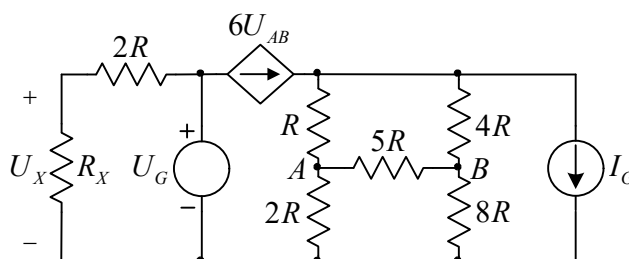


Slika 1.37e

1.38. Za kolo sa slike 1.38 je poznato: U_G , I_G i R .

a) Odrediti napon U_X ako je $R_X = R$.

b) Kolika bi trebala da bude otpornost otpornika R_X tako da se na njemu disipira maksimalna moguća snaga?



Slika 1.38

Rešenje:

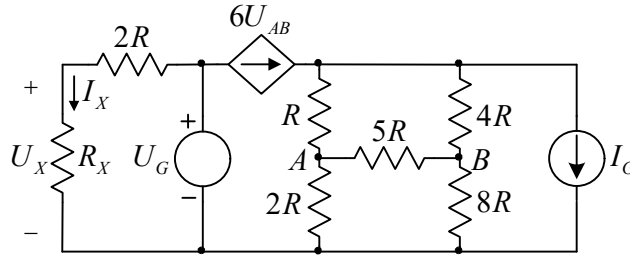
a) Napon U_X se može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_X = \frac{R_X}{R_X + 2R} \cdot U_G = \frac{R}{R + 2R} \cdot U_G = \frac{1}{3} U_G.$$

b) Snaga koja se disipira na otporniku R_X se može izraziti na sledeći način (pri čemu je struja I_X označena na slici 1.38a):

$$P_{R_X} = I_X^2 \cdot R_X = \left(\frac{U_G}{2R + R_X} \right)^2 \cdot R_X.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.38a

Otpornost R_X za koju je snaga P_{R_X} maksimalna se određuje iz uslova da je za tu vrednost R_X prvi izvod P_{R_X} po R_X jednak nuli:

$$\frac{dP_{R_X}}{dR_X} = 0.$$

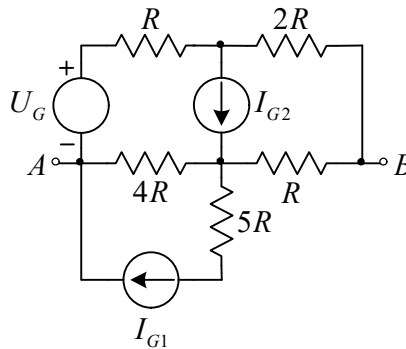
Dalje sledi:

$$\frac{dP_{R_X}}{dR_X} = \frac{d}{dR_X} \left[\frac{U_G^2 \cdot R_X}{(2R + R_X)^2} \right] = U_G^2 \cdot \frac{(2R + R_X)^2 - 2R_X(2R + R_X)}{(2R + R_X)^4} = U_G^2 \cdot \frac{(2R)^2 - R_X^2}{(2R + R_X)^4} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$R_X = 2R.$$

1.39. Za kolo sa slike 1.39 je poznato: U_G , I_{G1} , I_{G2} i R . Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B . Tom prilikom, napon Tevenenovog generatora odrediti primenom principa superpozicije.



Slika 1.39

Rešenje:

Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$

Napon U_{AB} se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente U'_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_G (dok su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} anulirani), komponente U''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_{G1} (dok su idealni naponski generator U_G i idealni strujni generator I_{G2} anulirani) i komponente U'''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_{G2} (dok su idealni naponski generator U_G i idealni strujni generator I_{G1} anulirani):

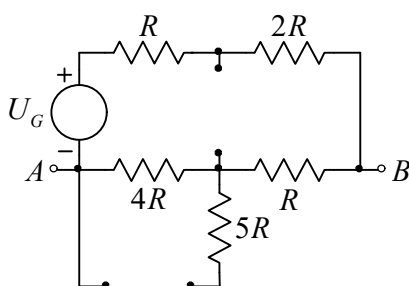
$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} + U'''_{AB},$$

$$U'_{AB} = U_{AB}(U_G \neq 0, I_{G1} = 0, I_{G2} = 0),$$

$$U''_{AB} = U_{AB}(U_G = 0, I_{G1} \neq 0, I_{G2} = 0),$$

$$U'''_{AB} = U_{AB}(U_G = 0, I_{G1} = 0, I_{G2} \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta U'_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.39a (u kom su idealni strujni generatori I_{G1} i I_{G2} anulirani tako što su zamenjeni otvorenim vezama)



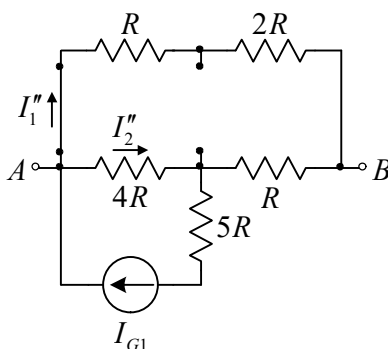
Slika 1.39a

$$U'_{AB} = -\frac{(4R + R)}{(4R + R) + (R + 2R)} \cdot U_G = -\frac{5}{8} U_G.$$

Superpoziciona komponenta U''_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.39b (u kom je idealni naponski generator U_G anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem, a idealni strujni generator I_{G2} anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom):

1. Električna kola stalnih struja

$$U''_{AB} = -R \cdot I''_1 + 4R \cdot I''_2.$$



Slika 1.39b

Struje I''_1 i I''_2 se mogu odrediti primenom formula za strujni razdelnik:

$$I''_1 = \frac{4R}{4R + (R + 2R + R)} \cdot I_{G1} = \frac{1}{2} I_{G1},$$

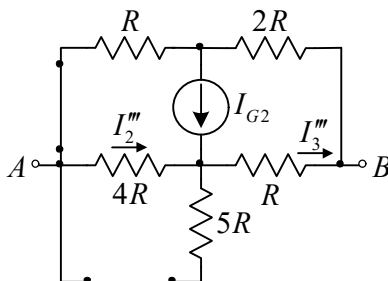
$$I''_2 = \frac{R + 2R + R}{4R + (R + 2R + R)} \cdot I_{G1} = \frac{1}{2} I_{G1}.$$

Uvrštavanjem dobijenih izraza za struje I''_1 i I''_2 u prethodno izvedeni izraz za napon U''_{AB} se dobija da je:

$$U''_{AB} = -R \cdot I''_1 + 4R \cdot I''_2 = -R \cdot \frac{1}{2} I_{G1} + 4R \cdot \frac{1}{2} I_{G1} = \frac{3}{2} R \cdot I_{G1}.$$

Superpoziciona komponenta U'''_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.39c (u kom je idealni naponski generator U_G anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem, a idealni strujni generator I_{G1} anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom):

$$U'''_{AB} = R \cdot I'''_3 + 4R \cdot I'''_2.$$



Slika 1.39c

Struje I'''_2 i I'''_3 se mogu odrediti primenom formula za strujni razdelnik:

1. Električna kola stalnih struja

$$I_2''' = -\frac{R+2R}{(R+2R)+(4R+R)} \cdot I_{G2} = -\frac{3}{8} I_{G2},$$

$$I_3''' = \frac{4R+R}{(R+2R)+(4R+R)} \cdot I_{G2} = \frac{5}{8} I_{G2}.$$

Uvrštavanjem dobijenih izraza za struje I_2''' i I_3''' u prethodno izvedeni izraz za napon U_{AB}''' se dobija da je:

$$U_{AB}''' = R \cdot I_3''' + 4R \cdot I_2''' = R \cdot \frac{5}{8} I_{G2} - 4R \cdot \frac{3}{8} I_{G2} = -\frac{7}{8} R \cdot I_{G2}.$$

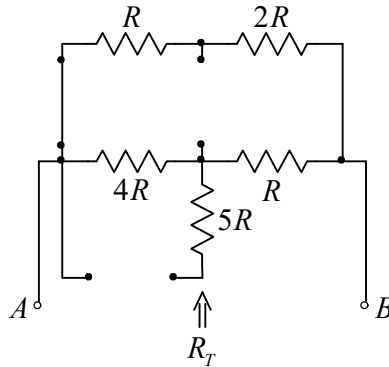
Konačno, napon U_{AB} je:

$$U_{AB} = U_{AB}' + U_{AB}'' + U_{AB}''' = -\frac{5}{8} U_G + \frac{3}{2} R \cdot I_{G1} - \frac{7}{8} R \cdot I_{G2},$$

tako da je napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B :

$$U_T = -\frac{5}{8} U_G + \frac{3}{2} R \cdot I_{G1} - \frac{7}{8} R \cdot I_{G2}.$$

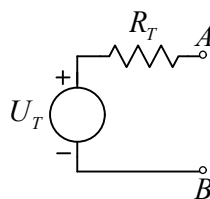
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.39d:



Slika 1.39d

$$R_T = (R+2R) \parallel (4R+R) = 3R \parallel 5R = \frac{15}{8} R.$$

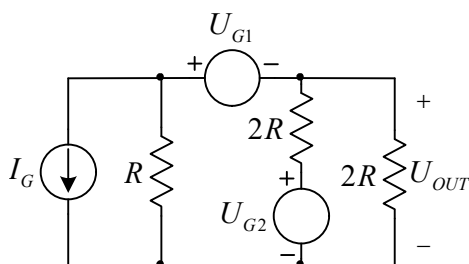
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.39e:



Slika 1.39e

1.40. Za kolo sa slike 1.40 je poznato: I_G , U_{G1} , U_{G2} i R .

- Primenom principa superpozicije odrediti napon U_{OUT} .
- Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti snagu koju predaje idealni strujni generator I_G .
- Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator U_{G1} .
- Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator U_{G2} .



Slika 1.40

Rešenje:

a) Napon U_{OUT} se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente U'_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_G (dok su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani), komponente U''_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G1} (dok su idealni strujni generator I_G i idealni naponski generator U_{G2} anulirani) i komponente U'''_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G2} (dok su idealni strujni generator I_G i idealni naponski generator U_{G1} anulirani):

$$U_{OUT} = U'_{OUT} + U''_{OUT} + U'''_{OUT},$$

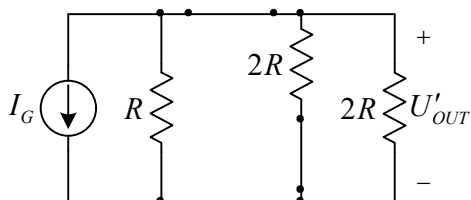
$$U'_{OUT} = U_{OUT} (I_G \neq 0, U_{G1} = 0, U_{G2} = 0),$$

$$U''_{OUT} = U_{OUT} (I_G = 0, U_{G1} \neq 0, U_{G2} = 0),$$

$$U'''_{OUT} = U_{OUT} (I_G = 0, U_{G1} = 0, U_{G2} \neq 0).$$

1. Električna kola stalnih struja

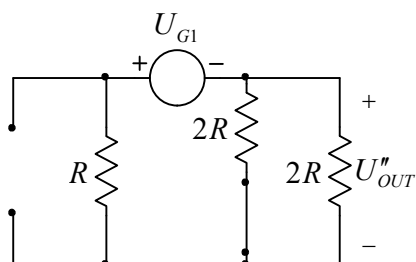
Superpoziciona komponenta U'_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.40a (u kom su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani tako što su zamenjeni kratkim spojevima) pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost paralelne veze tri otpornika otpornosti R , $2R$ i $2R$:



Slika 1.40a

$$U'_{OUT} = -(R \parallel 2R \parallel 2R) \cdot I_G = -\frac{1}{2} R \cdot I_G.$$

Superpoziciona komponenta U''_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.40b (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator U_{G2} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:

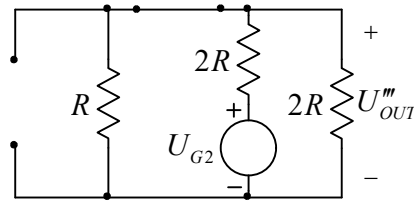


Slika 1.40b

$$U''_{OUT} = -\frac{2R \parallel 2R}{R + (2R \parallel 2R)} \cdot U_{G1} = -\frac{1}{2} U_{G1}.$$

Superpoziciona komponenta U'''_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.40c (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator U_{G1} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:

1. Električna kola stalnih struja



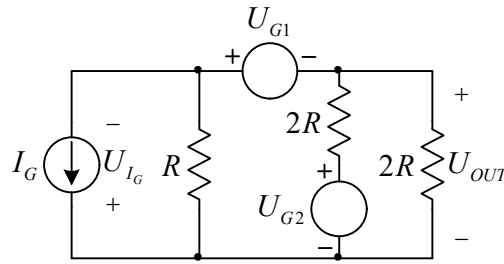
Slika 1.40c

$$U_{OUT}''' = \frac{2R \parallel R}{2R + (2R \parallel R)} \cdot U_{G2} = \frac{1}{4} U_{G2}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$U_{OUT} = U_{OUT}' + U_{OUT}'' + U_{OUT}''' = -\frac{1}{2} R \cdot I_G - \frac{1}{2} U_{G1} + \frac{1}{4} U_{G2}.$$

b) Napon U_{I_G} na idealnom strujnom generatoru I_G , koji ima usaglašen referentni smer za predaju snage sa referentnim smerom struje I_G , je označen na slici 1.40d.



Slika 1.40d

Napon U_{I_G} se može odrediti na sledeći način:

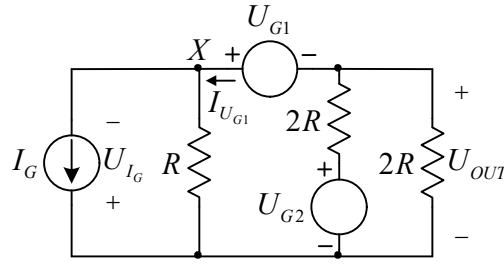
$$U_{I_G} = -U_{G1} - U_{OUT} = -\frac{1}{2} R \cdot I_G - \frac{1}{2} U_{G1} - \frac{1}{4} U_{G2}.$$

Snaga P_{I_G} koju predaje idealni strujni generator I_G je:

$$P_{I_G} = U_{I_G} \cdot I_G = \frac{1}{2} R \cdot I_G^2 - \frac{1}{2} U_{G1} \cdot I_G - \frac{1}{4} U_{G2} \cdot I_G.$$

c) Struja $I_{U_{G1}}$ koja protiče kroz idealni naponski generator U_{G1} , koja ima usaglašen referentni smer za predaju snage sa referentnim smerom napona U_{G1} , je označena na slici 1.40e.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.40e

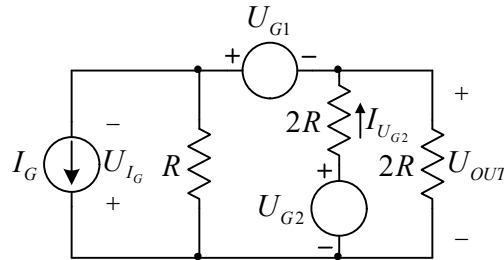
Struja $I_{U_{G1}}$ se može odrediti pomoću jednačine po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , u kojoj je struja kroz otpornik otpornosti R izražena preko Omovog zakona:

$$I_{U_{G1}} = I_G + \frac{U_{OUT} + U_{G1}}{R} = \frac{1}{2} I_G + \frac{U_{G1}}{2R} + \frac{U_{G2}}{4R}.$$

Snaga $P_{U_{G1}}$ koju predaje idealni naponski generator U_{G1} je:

$$P_{U_{G1}} = U_{G1} \cdot I_{U_{G1}} = \frac{1}{2} U_{G1} I_G + \frac{U_{G1}^2}{2R} + \frac{U_{G1} \cdot U_{G2}}{4R}.$$

d) Struja $I_{U_{G2}}$ koja protiče kroz idealni naponski generator U_{G2} , koja ima usaglašen referentni smer za predaju snage sa referentnim smerom napona U_{G2} , je označena na slici 1.40f.



Slika 1.40f

Struja $I_{U_{G2}}$ se može odrediti pomoću jednačine po Omovom zakonu za otpornik otpornosti $2R$ koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom U_{G2} :

$$I_{U_{G2}} = \frac{U_{G2} - U_{OUT}}{2R} = \frac{1}{4} I_G + \frac{U_{G1}}{4R} + \frac{3U_{G2}}{8R}.$$

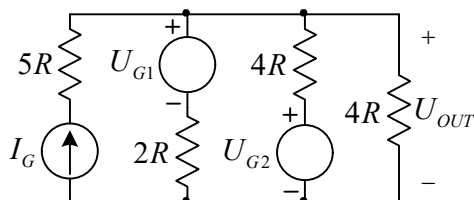
Snaga $P_{U_{G2}}$ koju predaje idealni naponski generator U_{G2} je:

$$P_{U_{G2}} = U_{G2} \cdot I_{U_{G2}} = \frac{1}{4} U_{G2} I_G + \frac{U_{G1} \cdot U_{G2}}{4R} + \frac{3U_{G2}^2}{8R}.$$

1.41. Za kolo sa slike 1.41 je poznato: I_G , U_{G1} , U_{G2} i R .

a) Primenom principa superpozicije odrediti napon U_{OUT} .

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koju predaje idealni strujni generator I_G .



Slika 1.41

Rešenje:

a) Napon U_{OUT} se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente U'_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_G (dok su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani), komponente U''_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G1} (dok su idealni strujni generator I_G i idealni naponski generator U_{G2} anulirani) i komponente U'''_{OUT} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_{G2} (dok su idealni strujni generator I_G i idealni naponski generator U_{G1} anulirani):

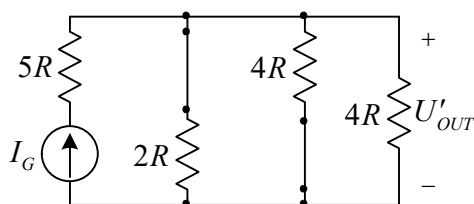
$$U_{OUT} = U'_{OUT} + U''_{OUT} + U'''_{OUT},$$

$$U'_{OUT} = U_{OUT}(I_G \neq 0, U_{G1} = 0, U_{G2} = 0),$$

$$U''_{OUT} = U_{OUT}(I_G = 0, U_{G1} \neq 0, U_{G2} = 0),$$

$$U'''_{OUT} = U_{OUT}(I_G = 0, U_{G1} = 0, U_{G2} \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta U'_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.41a (u kom su idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anulirani tako što su zamenjeni kratkim spojevima) pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost paralelne veze otpornika $2R$, $4R$ i $4R$:

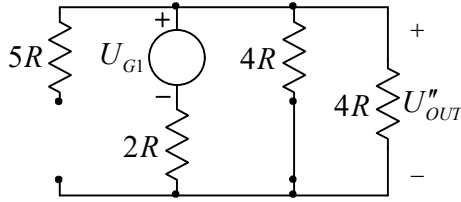


Slika 1.41a

1. Električna kola stalnih struja

$$U'_{OUT} = (2R \parallel 4R \parallel 4R) \cdot I_G = R \cdot I_G.$$

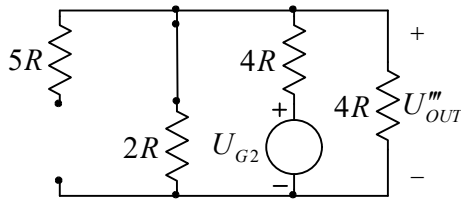
Superpoziciona komponenta U''_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.41b (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator U_{G2} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:



Slika 1.41b

$$U''_{OUT} = \frac{4R \parallel 4R}{2R + (4R \parallel 4R)} \cdot U_{G1} = \frac{1}{2} U_{G1}.$$

Superpoziciona komponenta U'''_{OUT} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.41c (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a idealni naponski generator U_{G1} anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za razdelnik napona:



Slika 1.41c

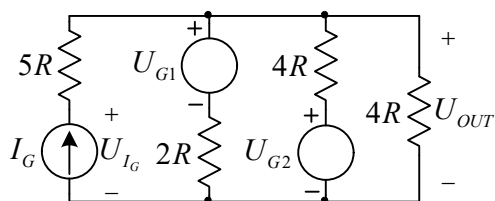
$$U'''_{OUT} = \frac{2R \parallel 4R}{4R + (2R \parallel 4R)} \cdot U_{G2} = \frac{1}{4} U_{G2}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$U_{OUT} = U'_{OUT} + U''_{OUT} + U'''_{OUT} = R \cdot I_G + \frac{1}{2} U_{G1} + \frac{1}{4} U_{G2}.$$

b) Napon U_{I_G} na idealnom strujnom generatoru I_G , koji ima usaglašen referentni smer za predaju snage sa referentnim smerom struje I_G , je označen na slici 1.41d.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.41d

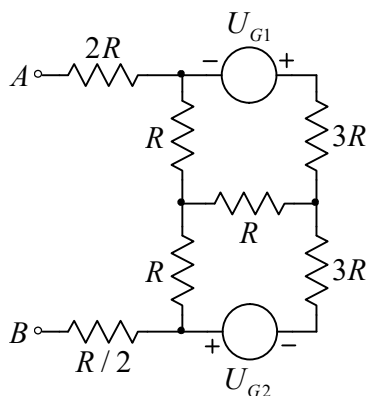
Napon U_{I_G} se može odrediti na sledeći način:

$$U_{I_G} = U_{OUT} + 5R \cdot I_G = 6R \cdot I_G + \frac{1}{2}U_{G1} + \frac{1}{4}U_{G2}.$$

Snaga P_{I_G} koju predaje idealni strujni generator I_G je:

$$P_{I_G} = U_{I_G} \cdot I_G = 6R \cdot I_G^2 + \frac{1}{2}U_{G1} \cdot I_G + \frac{1}{4}U_{G2} \cdot I_G.$$

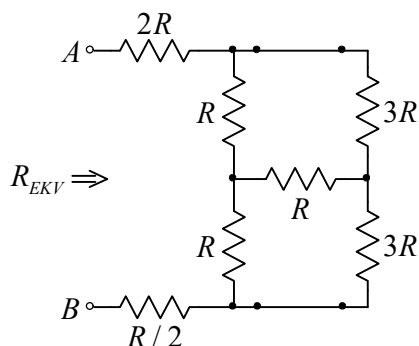
1.42. Za kolo sa slike 1.42 je poznato: U_{G1} , U_{G2} i R . Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B .



Slika 1.42

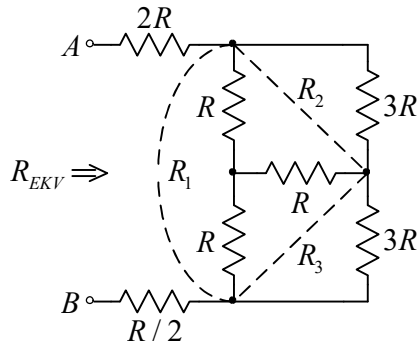
Rešenje:

S obzirom da se kolo sa slike sastoji od otpornika i nezavisnih generatora, ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se može odrediti tako što se najpre anuliraju svi nezavisni generatori u kolu, a zatim se za tako dobijenu otporničku mrežu odredi ekvivalentna otpornost između tačaka A i B .



Slika 1.42a

Na slici 1.42a je prikazana otpornička mreža koja se dobija kada se idealni naponski generatori U_{G1} i U_{G2} anuliraju tako što se zamene kratkim spojevima. Pošto u toj otporničkoj mreži ne postoje dva ili više redno vezanih otpornika, i ne postoje dva ili više paralelno vezanih otpornika, neophodno je izvršiti transformaciju zvezde otpornika u trougao otpornika (ili transformaciju trougla otpornika u zvezdu otpornika), kako bi se omogućilo određivanje tražene ekvivalentne otpornosti između tačaka A i B . Jedan od načina da se to uradi je da se zvezda, koju sačinjavaju tri otpornika otpornosti R , transformiše u trougao koga će sačinjavati otpornici otpornosti R_1 , R_2 i R_3 na pozicijama koje su označene isprekidanim linijama, kao što je to prikazano na slici 1.42b.



Slika 1.42b

Otpornosti otpornika koji će sačinjavati trougao se izračunavaju prema sledećim formulama:

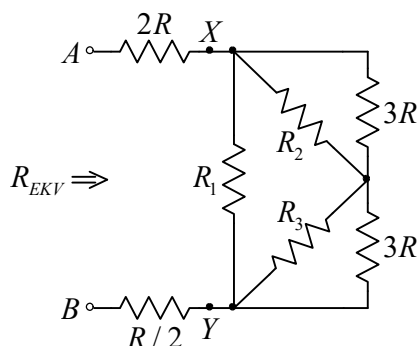
$$R_1 = R + R + \frac{R \cdot R}{R} = 3R,$$

$$R_2 = R + R + \frac{R \cdot R}{R} = 3R,$$

$$R_3 = R + R + \frac{R \cdot R}{R} = 3R.$$

1. Električna kola stalnih struja

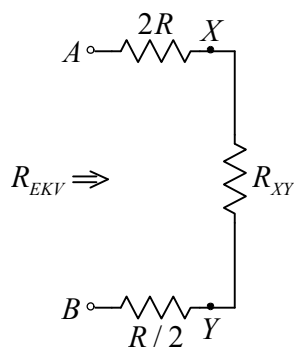
Na slici 1.42c je prikazan izgled otporničke mreže sa slike 1.42b nakon što je izvršena opisana transformacija zvezde otpornika u trougao otpornika.



Slika 1.42c

Ekvivalentna otpornost dela otporničke mreže sa slike 1.42c desno od tačaka X i Y se može izraziti na sledeći način:

$$R_{XY} = R_1 \parallel ((R_2 \parallel 3R) + (R_3 \parallel 3R)) = 3R \parallel ((3R \parallel 3R) + (3R \parallel 3R)) = 3R \parallel (1.5R + 1.5R) = 3R \parallel 3R = 1.5R$$
 tako da se otpornička mreža sa slike 1.42c može ekvivalentirati otporničkom mrežom prikazanom na slici 1.42d.



Slika 1.42d

Konačno, na osnovu slike 1.42d se zaključuje da je tražena ekvivalentna otpornost između tačaka A i B :

$$R_{EKV} = 2R + R_{XY} + 0.5R = 2R + 1.5R + 0.5R = 4R.$$

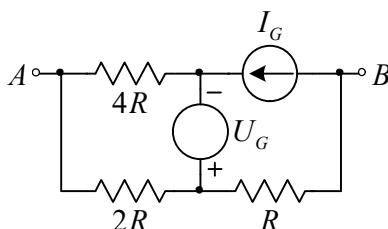
1.43. Za kolo sa slike 1.43 je poznato: U_G , I_G i R .

a) Odrediti superpozicionu komponentu U'_{AB} napona U_{AB} , koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_G , dok je idealni strujni generator I_G anuliran.

1. Električna kola stalnih struja

b) Odrediti superpozicionu komponentu U''_{AB} napona U_{AB} , koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_G , dok je idealni naponski generator U_G anuliran.

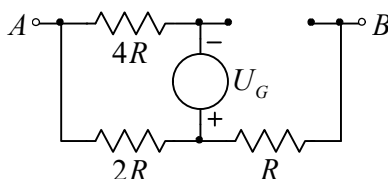
c) Korišćenjem rezultata iz prethodne dve tačke, odrediti napon U_{AB} .



Slika 1.43

Rešenje:

a) Superpoziciona komponenta U'_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.43a (u kom je idealni strujni generator I_G anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom) primenom formule za razdelnik napona (imajući u vidu da kroz otpornik otpornosti R ne protiče struja, jer na jednom kraju grane u kojoj se nalazi taj otpornik postoji prekid, tako da će po Omovom zakonu napon na tom otporniku biti jednak nuli):

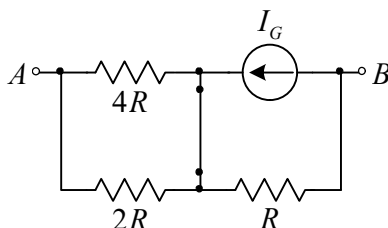


Slika 1.43a

$$U'_{AB} = -\frac{2R}{2R + 4R} \cdot U_G = -\frac{1}{3}U_G.$$

b) Superpoziciona komponenta U''_{AB} se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 1.43b (u kom je idealni naponski generator U_G anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti R (imajući u vidu da kroz paralelnu vezu dva otpornika otpornosti $4R$ i $2R$ ne protiče struja, jer na levom kraju te paralelne veze postoji prekid, tako da će po Omovom zakonu napon na toj paralelnoj vezi otpornika biti jednak nuli):

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.43b

$$U''_{AB} = R \cdot I_G.$$

c) Napon U_{AB} se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente U'_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator U_G (dok je idealni strujni generator I_G anuliran) i komponente U''_{AB} koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator I_G (dok je idealni naponski generator U_G anuliran):

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB},$$

$$U'_{AB} = U_{AB}(U_G \neq 0, I_G = 0),$$

$$U''_{AB} = U_{AB}(U_G = 0, I_G \neq 0).$$

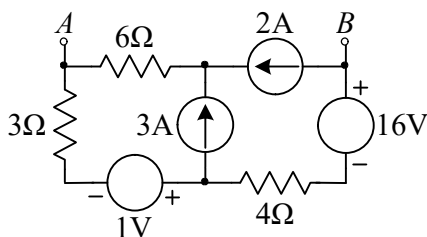
Imajući u vidu rezultate iz prethodne dve tačke, dobija se da je:

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} = -\frac{1}{3}U_G + R \cdot I_G.$$

1.44. a) Za kolo sa slike 1.44 odrediti napon ekvivalentnog Tevenenovog generatora između tačaka A i B .

b) Za kolo sa slike 1.44 odrediti otpornost ekvivalentnog Tevenenovog generatora između tačaka A i B .

c) Korišćenjem rezultata iz prethodne dve tačke, za kolo sa slike 1.44 nacrtati simbol ekvivalentnog Tevenenovog generatora između tačaka A i B .

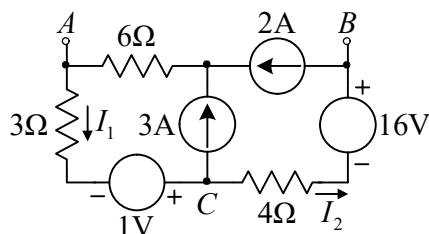


Slika 1.44

Rešenje:

a) Napon ekvivalentnog Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$



Slika 1.44a

Napon U_{AB} se, na osnovu kola prikazanog na slici 1.44a (koje je potpuno ekvivalentno kolu iz postavke zadatka), može odrediti na sledeći način:

$$U_{AB} = -16V + I_2 \cdot 4\Omega - 1V + I_1 \cdot 3\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_2 = 2A,$$

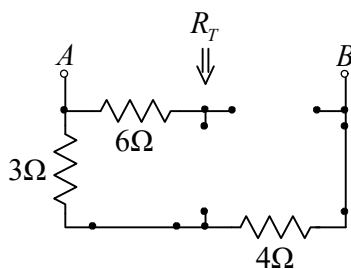
dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$I_1 = I_2 + 3A = 5A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_T = U_{AB} = 6V.$$

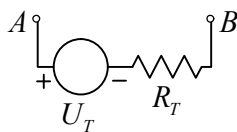
b) Otpornost ekvivalentnog Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.44b:



Slika 1.44b

$$R_T = 3\Omega + 4\Omega = 7\Omega.$$

c) Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.44c:

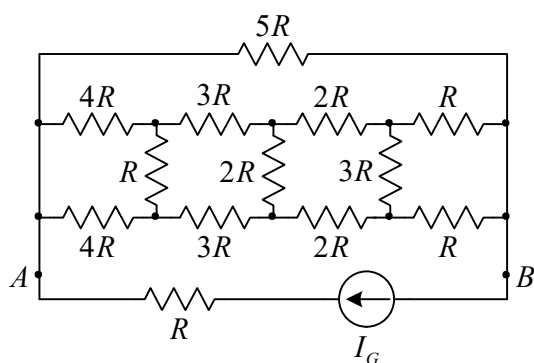


Slika 1.44c

1.45. Za kolo sa slike 1.45 je poznato: I_G i R .

a) Odrediti ekvivalentnu otpornost za deo kola iznad tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koju predaje idealni strujni generator I_G .



Slika 1.45

Rešenje:

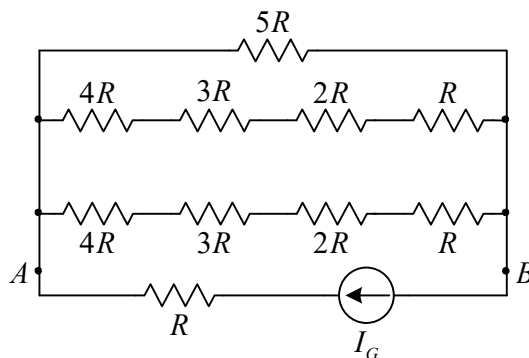
a) Na osnovu postavke zadatka se može zaključiti da za odnos otpornosti četiri horizontalno postavljena otpornika u redu neposredno ispod otpornika otpornosti $5R$ i odnos otpornosti četiri horizontalno postavljena otpornika u redu neposredno iznad idealnog strujnog generatora I_G važi:

$$4R : 3R : 2R : R = 4R : 3R : 2R : R,$$

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između tačaka A i B , potencijal gornjeg kraja vertikalno postavljenog otpornika otpornosti R biti jednak potencijalu donjeg kraja tog otpornika, da će potencijal gornjeg kraja vertikalno postavljenog otpornika otpornosti $2R$ biti jednak potencijalu donjeg kraja tog otpornika, kao i da će potencijal gornjeg kraja vertikalno postavljenog otpornika otpornosti $3R$ biti jednak potencijalu donjeg kraja tog otpornika. Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za svaki od vertikalno postavljenih otpornika) i da će struja kroz svaki od tri vertikalno postavljena otpornika biti jednaka nuli, koliki god da je napon između tačaka A i B .

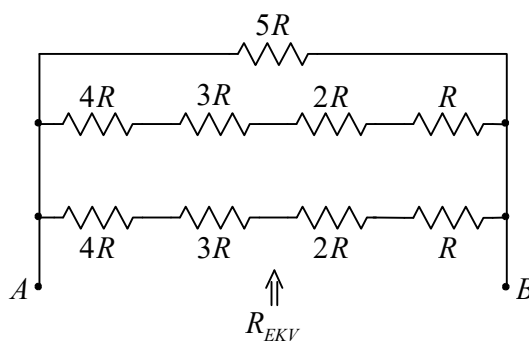
1. Električna kola stalnih struja

To znači da se vertikalno postavljene otpornice mogu zameniti bilo kratkim spojevima (jer je napon na njihovim krajevima jednak nuli), bilo otvorenim vezama (jer su struje kroz te otpornike jednake nuli), tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo. Ukoliko se vertikalno postavljene otpornice zamene otvorenim vezama, ekvivalentno kolo će imati izgled prikazan na slici 1.45a:



Slika 1.45a

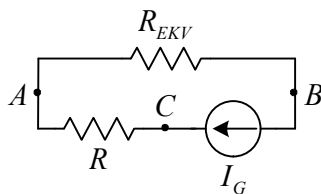
Ekvivalentna otpornost za deo kola iznad tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.45b:



Slika 1.45b

$$R_{EKV} = (4R + 3R + 2R + R) \parallel (4R + 3R + 2R + R) \parallel 5R = 10R \parallel 10R \parallel 5R = \frac{5}{2}R.$$

b) Na osnovu rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može predstaviti ekvivalentnom šemom sa slike 1.45c:



Slika 1.45c

Snaga koju predaje idealni strujni generator I_G se može izračunati na sledeći način:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{I_G} = I_G \cdot U_{CB}.$$

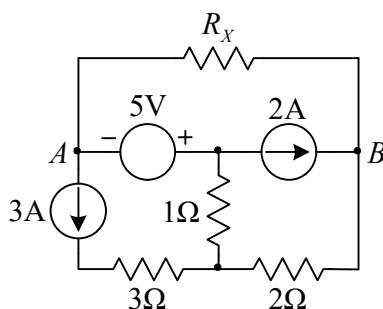
Napon U_{CB} se može odrediti pomoću Omovog zakona za ekvivalentnu otpornost redne veze otpornika R i R_{EKV} :

$$U_{CB} = (R + R_{EKV}) \cdot I_G = \frac{7}{2} R \cdot I_G,$$

tako da je konačno:

$$P_{I_G} = I_G \cdot U_{CB} = \frac{7}{2} R \cdot I_G^2.$$

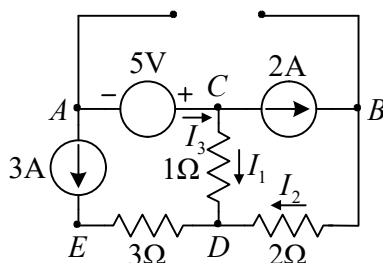
1.46. Za kolo sa slike 1.46 je poznato da $R_X \rightarrow \infty$. Odrediti napon U_{BA} , snagu koju predaje idealni naponski generator napona 5V, snagu koju predaje idealni strujni generator struje 2A, snagu koju predaje idealni strujni generator struje 3A i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 1Ω .



Slika 1.46

Rešenje:

S obzirom da po uslovu zadatka $R_X \rightarrow \infty$, otpornik otpornosti R_X se može zameniti otvorenom vezom tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo, kao što je prikazano na slici 1.46a:



Slika 1.46a

1. Električna kola stalnih struja

Napon U_{BA} se, na osnovu kola prikazanog na slici 1.46a, može odrediti na sledeći način:

$$U_{BA} = 5V - I_1 \cdot 1\Omega + I_2 \cdot 2\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_2 = 2A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor D :

$$I_1 = -I_2 - 3A = -5A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{BA} = 14V.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $5V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5V} = I_3 \cdot 5V.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C je:

$$I_3 = I_1 + 2A = -3A,$$

tako da je snaga koju predaje idealni naponski generator napona $5V$:

$$P_{5V} = I_3 \cdot 5V = -15W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = U_{BC} \cdot 2A.$$

Napon U_{BC} se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$U_{BC} = U_{BA} - 5V,$$

tako da je snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$:

$$P_{2A} = U_{BC} \cdot 2A = (U_{BA} - 5V) \cdot 2A = 18W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3A} = U_{EA} \cdot 3A.$$

Napon U_{EA} se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$U_{EA} = U_{BA} - I_2 \cdot 2\Omega + 3A \cdot 3\Omega,$$

tako da je snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$:

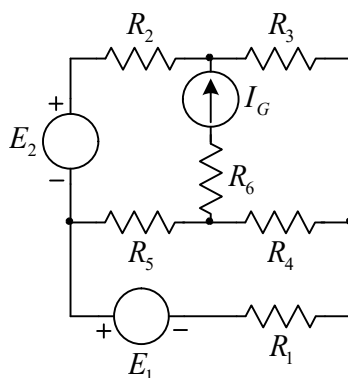
$$P_{3A} = U_{EA} \cdot 3A = (U_{BA} - I_2 \cdot 2\Omega + 3A \cdot 3\Omega) \cdot 3A = 57W.$$

1. Električna kola stalnih struja

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 1Ω je:

$$P_{1\Omega} = 1\Omega \cdot I_1^2 = 25\text{W}.$$

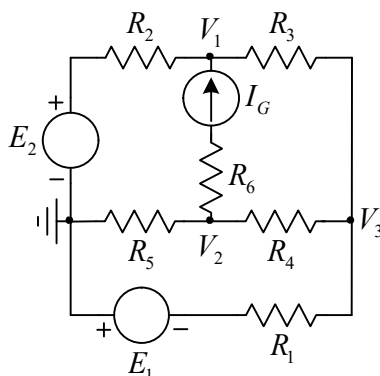
1.47. Za kolo sa slike 1.47 je poznato: $R_1 = R_2 = R_3 = 500\Omega$, $R_4 = R_5 = 1\text{k}\Omega$, $R_6 = 2\text{k}\Omega$, $E_1 = E_2 = 10\text{V}$ i $I_G = 40\text{mA}$. Odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator E_1 , snagu koju predaje idealni strujni generator I_G i snage koje se disipiraju na svakom od otpornika R_1 , R_2 , R_3 i R_4 .



Slika 1.47

Rešenje:

Kao prvi korak u rešavanju ovog zadatka, mogu se odrediti potencijali svih čvorova u kolu sa slike 1.47 primenom metoda potencijala čvorova. S obzirom da u zadatom kolu ne postoji nijedan idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora, referentni čvor se može proizvoljno izabrati.



Slika 1.47a

1. Električna kola stalnih struja

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.47a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.47a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 - \frac{1}{R_3} \cdot V_3 &= \frac{E_2}{R_2} + I_G \\ -0 \cdot V_1 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{R_4} \cdot V_3 &= -I_G \\ -\frac{1}{R_3} \cdot V_1 - \frac{1}{R_4} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \cdot V_3 &= -\frac{E_1}{R_1} \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom brojnih vrednosti iz postavke zadatka, u napisani sistem jednačina, dobija se:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{500\Omega} + \frac{1}{500\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{500\Omega} \cdot V_3 &= \frac{10V}{500\Omega} + 0.04A \\ \left(\frac{1}{1000\Omega} + \frac{1}{1000\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1000\Omega} \cdot V_3 &= -0.04A \\ -\frac{1}{500\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1000\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{500\Omega} + \frac{1}{500\Omega} + \frac{1}{1000\Omega} \right) \cdot V_3 &= -\frac{10V}{500\Omega} \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} 2V_1 - V_3 &= 30V \\ 2V_2 - V_3 &= -40V \\ -2V_1 - V_2 + 5V_3 &= -20V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}V_3 + 15V \\ V_2 &= \frac{1}{2}V_3 - 20V \\ -2V_1 - V_2 + 5V_3 &= -20V \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenih izraza za V_1 i V_2 u treću jednačinu, sledi:

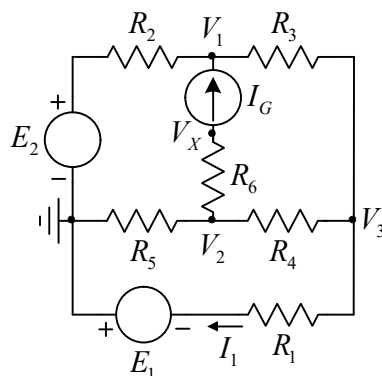
$$-2 \cdot \left(\frac{1}{2}V_3 + 15V \right) - \left(\frac{1}{2}V_3 - 20V \right) + 5V_3 = -20V \Rightarrow \frac{7}{2}V_3 = -10V \Rightarrow V_3 = -\frac{20}{7}V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_3 u izvedene izraze za potencijale V_1 i V_2 , dobija se:

$$V_1 = \frac{95}{7}V,$$

$$V_2 = -\frac{150}{7}V.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.47b

Snaga koju predaje idealni naponski generator E_1 se može izračunati na sledeći način:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_1,$$

gde je I_1 struja koja je označena na slici 1.47b, koja se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik R_1 :

$$I_1 = \frac{V_3 - (0 - E_1)}{R_1} = \frac{1}{70} \text{ A},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_1 = \frac{1}{7} \text{ W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator I_G se može izračunati na sledeći način:

$$P_{I_G} = (V_1 - V_X) \cdot I_G,$$

gde je V_X potencijal donjeg priključka idealnog strujnog generatora I_G koji je označen na slici 1.47b, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_2 - R_6 \cdot I_G = -\frac{710}{7} \text{ V},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{I_G} = (V_1 - V_X) \cdot I_G = 4.6 \text{ W}.$$

Snage koje se disipiraju na otpornicima R_1 , R_2 , R_3 i R_4 se mogu izračunati na sledeći način:

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = \frac{5}{49} \text{ W},$$

$$P_{R_2} = \frac{(0 + E_2 - V_1)^2}{R_2} = \frac{5}{196} \text{ W},$$

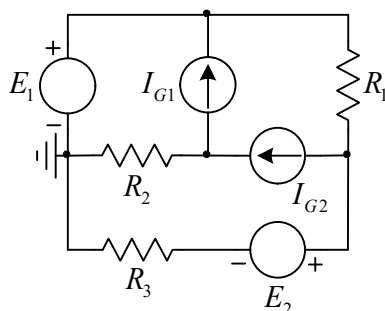
$$P_{R_3} = \frac{(V_1 - V_3)^2}{R_3} = \frac{529}{980} \text{ W},$$

$$P_{R_4} = \frac{(V_2 - V_3)^2}{R_4} = \frac{169}{490} \text{ W}.$$

1.48. Za kolo sa slike 1.48 je poznato: $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = R_3 = 2\Omega$, $E_1 = 3\text{V}$, $E_2 = 16\text{V}$, $I_{G1} = 2\text{A}$ i $I_{G2} = 4\text{A}$.

a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu u odnosu na označeni referentni čvor.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator E_2 , snagu koju predaje idealni strujni generator I_{G2} i snagu koja se disipira na otporniku R_2 .



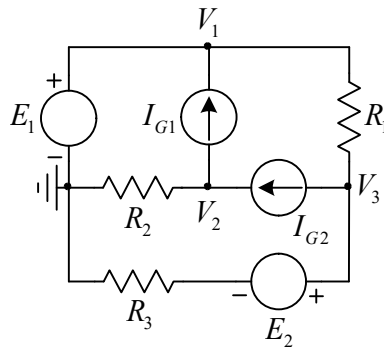
Slika 1.48

Rešenje:

a) Ukoliko se potencijali čvorova u zadatom kolu označe na način prikazan na slici 1.48a, po metodu potencijala čvorova se za to kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= E_1 \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= E_1 \\ -0 \cdot V_1 + \frac{1}{R_2} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= -I_{G1} + I_{G2} \\ -\frac{1}{R_1} \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \cdot V_3 &= \frac{E_2}{R_3} - I_{G2} \end{aligned} \right\}.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.48a

Zamenom brojnih vrednosti iz postavke zadatka, u napisani sistem jednačina, dobija se:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 3\text{V} \\ \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 &= -2\text{A} + 4\text{A} \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_3 &= \frac{16\text{V}}{2\Omega} - 4\text{A} \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 3\text{V} \\ V_2 &= 4\text{V} \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 + \frac{5}{6\Omega} \cdot V_3 &= 4\text{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 3\text{V} \\ V_2 &= 4\text{V} \\ V_3 &= \left(4\text{V} + \frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 \right) \cdot \frac{6}{5}\Omega \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 3\text{V} \\ V_2 &= 4\text{V} \\ V_3 &= 6\text{V} \end{aligned} \right\}.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator E_2 se može izračunati na sledeći način:

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_2,$$

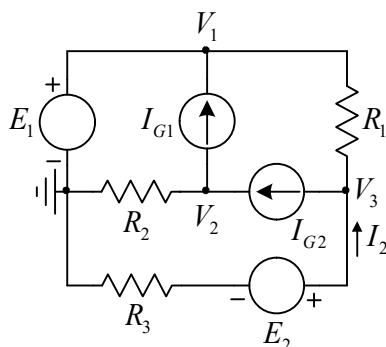
gde je I_2 struja koja je označena na slici 1.48b, koja se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik R_3 :

$$I_2 = \frac{0 - (V_3 - E_2)}{R_3} = 5\text{A},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{E_2} = E_2 \cdot I_2 = 80\text{W}.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.48b

Snaga koju predaje idealni strujni generator I_{G2} se može izračunati na sledeći način:

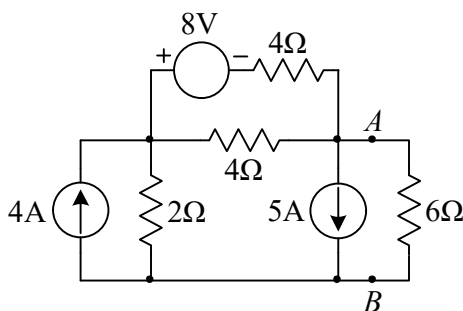
$$P_{I_{G2}} = (V_2 - V_3) \cdot I_{G2} = -8 \text{ W}.$$

Snaga koja se disipira na otporniku R_2 se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$P_{R_2} = \frac{(V_2 - 0)^2}{R_2} = 8 \text{ W}.$$

1.49. a) Za kolo sa slike 1.49 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B . Tom prilikom, struju Nortonovog generatora odrediti primenom metoda transformacije izvora.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 6Ω .



Slika 1.49

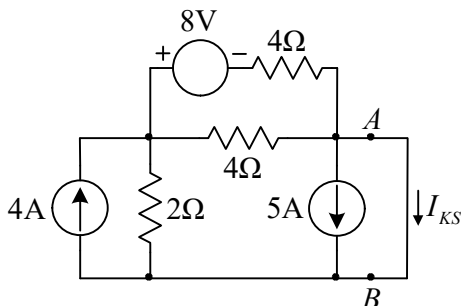
Rešenje:

a) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

1. Električna kola stalnih struja

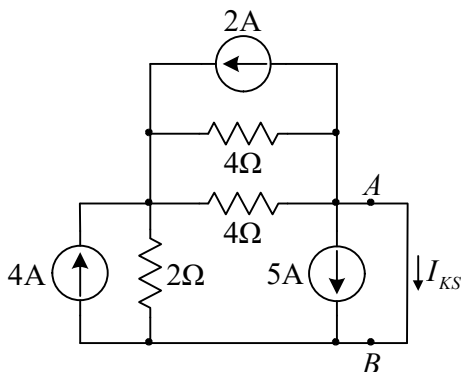
$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.49a.



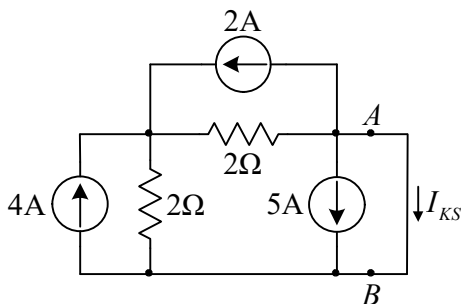
Slika 1.49a

U kolu sa slike 1.49a se redna veza idealnog naponskog generatora napona 8V i otpornika otpornosti 4Ω , primenom metoda transformacije izvora, može transformisati u paralelnu vezu idealnog strujnog generatora struje 2A i otpornika otpornosti 4Ω . Na taj način se dobija kolo prikazano na slici 1.49b, koje je potpuno ekvivalentno kolu sa slike 1.49a.



Slika 1.49b

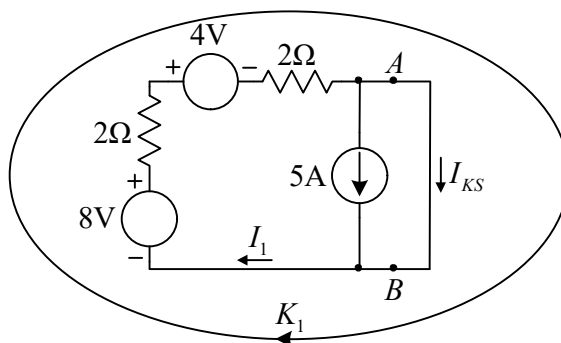
U kolu sa slike 1.49b se paralelna veza dva otpornika otpornosti 4Ω može ekvivalentirati jednim otpornikom otpornosti 2Ω . Na taj način se dobija kolo prikazano na slici 1.49c, koje je potpuno ekvivalentno kolu sa slike 1.49b.



Slika 1.49c

1. Električna kola stalnih struja

U kolu sa slike 1.49c se paralelna veza idealnog strujnog generatora struje 2 A i otpornika otpornosti 2Ω , primenom metoda transformacije izvora, može transformisati u rednu vezu idealnog naponskog generatora napona 4 V i otpornika otpornosti 2Ω . Takođe, i paralelna veza idealnog strujnog generatora struje 4 A i otpornika otpornosti 2Ω se, primenom metoda transformacije izvora, može transformisati u rednu vezu idealnog naponskog generatora napona 8 V i otpornika otpornosti 2Ω . Na taj način se dobija kolo prikazano na slici 1.49d, koje je potpuno ekvivalentno kolu sa slike 1.49c.



Slika 1.49d

Za kolo sa slike 1.49d se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima otpornosti 2Ω izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$8\text{ V} - I_1 \cdot 2\Omega - 4\text{ V} - I_1 \cdot 2\Omega = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$I_1 \cdot 4\Omega = 4\text{ V} \Rightarrow I_1 = 1\text{ A}.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za tačku B , glasi:

$$I_1 = I_{KS} + 5\text{ A},$$

odakle se dobija da je:

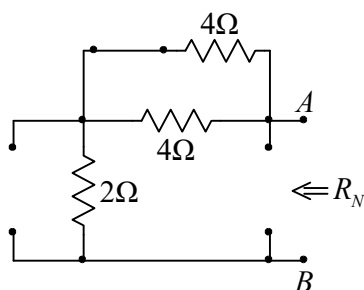
$$I_{KS} = I_1 - 5\text{ A} = -4\text{ A},$$

tako da je konačno:

$$I_N = I_{KS} = -4\text{ A}.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.49e:

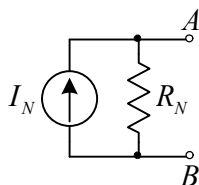
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.49e

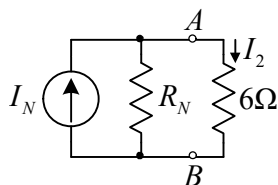
$$R_N = 2\Omega + (4\Omega \parallel 4\Omega) = 4\Omega .$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.49a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.49f:



Slika 1.49f

b) Kolo sa slike 1.49 se, korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, može predstaviti ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 1.49g:



Slika 1.49g

Struja I_2 (označena na slici 1.49g) se može odrediti pomoću formule za strujni razdelnik:

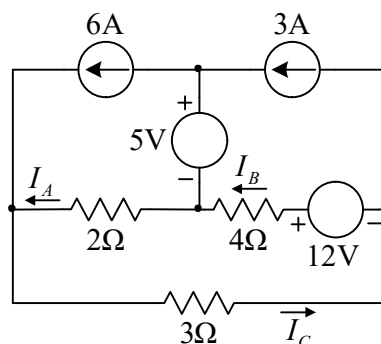
$$I_2 = \frac{R_N}{R_N + 6\Omega} \cdot I_N = \frac{4\Omega}{4\Omega + 6\Omega} \cdot (-4\text{A}) = -1.6\text{A} .$$

Konačno, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 6Ω se može izračunati na sledeći način:

$$P_{6\Omega} = I_2^2 \cdot 6\Omega = 15.36\text{W} .$$

1. Električna kola stalnih struja

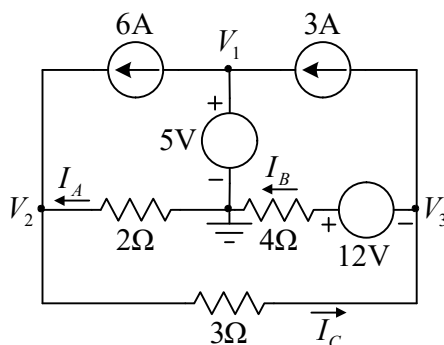
1.50. Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.50. Odrediti i struje I_A , I_B i I_C .



Slika 1.50

Rešenje:

S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 5V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 5V.



Slika 1.50a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.50a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.50a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 5V \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 = I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I^{(3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 5V \\ -0 \cdot V_1 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 = 6A \\ -0 \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) \cdot V_3 = -\frac{12V}{4\Omega} - 3A \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 5\text{V} \\ \frac{5}{6\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 = 6\text{A} \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \frac{7}{12\Omega} \cdot V_3 = -6\text{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 5\text{V} \\ V_3 = \frac{5}{2}V_2 - 18\text{V} \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \frac{7}{12\Omega} \cdot V_3 = -6\text{A} \end{array} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_3 u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \frac{7}{12\Omega} \cdot \left(\frac{5}{2}V_2 - 18\text{V} \right) = -6\text{A} \Rightarrow \frac{9}{8\Omega} \cdot V_2 = \frac{9}{2}\text{A} \Rightarrow V_2 = 4\text{V}.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_3 , dobija se:

$$V_3 = -8\text{V}.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{0 - V_2}{2\Omega} = -2\text{A}.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω :

$$I_B = \frac{V_3 - (0 - 12\text{V})}{4\Omega} = 1\text{A}.$$

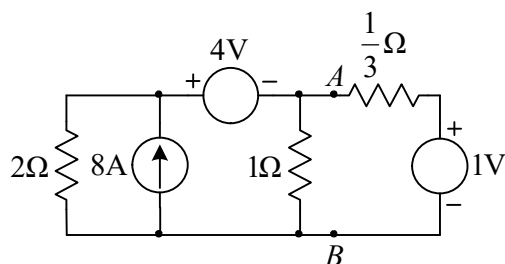
Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 3Ω :

$$I_C = \frac{V_2 - V_3}{3\Omega} = 4\text{A}.$$

1.51. a) Za kolo sa slike 1.51 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator napona 1V .

1. Električna kola stalnih struja

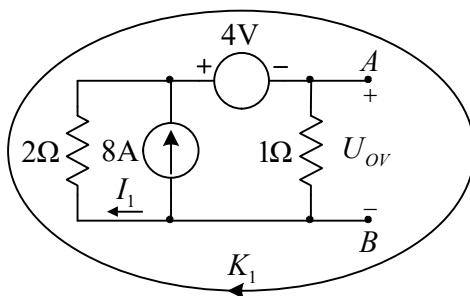


Slika 1.51

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.51a:

$$U_T = U_{ov}.$$



Slika 1.51a

Za kolo sa slike 1.51a se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj je napon na otporniku otpornosti 2Ω izražen preko Omovog zakona, glasi:

$$-I_1 \cdot 2\Omega - 4V - U_{ov} = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor B , u kojoj je struja kroz otpornik otpornosti 1Ω izražena preko Omovog zakona, glasi:

$$\frac{U_{ov}}{1\Omega} = I_1 + 8A,$$

odakle se dobija da je:

$$I_1 = \frac{U_{ov}}{1\Omega} - 8A,$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju I_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 dobija da je:

1. Električna kola stalnih struja

$$-\left(\frac{U_{OV}}{1\Omega} - 8\text{A}\right) \cdot 2\Omega - 4\text{V} - U_{OV} = 0.$$

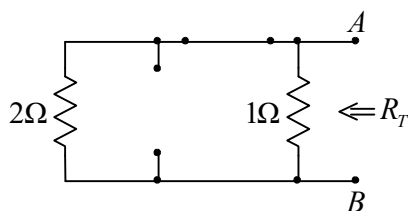
Napon U_{OV} (označen na slici 1.51a) se na osnovu prethodne jednačine može izračunati na sledeći način:

$$3U_{OV} = 12\text{V} \Rightarrow U_{OV} = 4\text{V},$$

tako da je konačno:

$$U_T = U_{OV} = 4\text{V}.$$

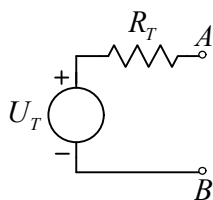
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.51b:



Slika 1.51b

$$R_T = 2\Omega \parallel 1\Omega = \frac{2}{3}\Omega.$$

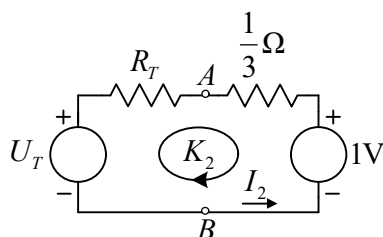
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.51a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.51c:



Slika 1.51c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.51d:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.51d

Za kolo sa slike 1.51d se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_2 (za smer obilaska konture označen na slici 1.51d) u kojoj su naponi na otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$U_T + I_2 \cdot R_T + I_2 \cdot \frac{1}{3} \Omega - 1V = 0,$$

odakle se dobija da je:

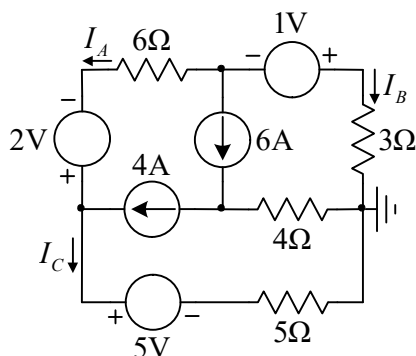
$$I_2 = \frac{1V - U_T}{R_T + \frac{1}{3} \Omega} = -3A.$$

Konačno, snaga koju predaje idealni naponski generator napona 1V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{1V} = I_2 \cdot 1V = -3W.$$

1.52. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.52. u odnosu na označeni referentni čvor. Odrediti i struje I_A , I_B i I_C .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

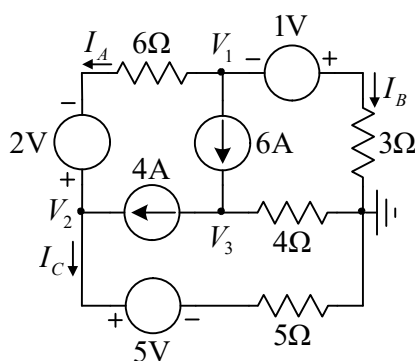


Slika 1.52

Rešenje:

a) Ukoliko se potencijali čvorova u zadatom kolu označe na način prikazan na slici 1.52a, po metodu potencijala čvorova se za to kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{6\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= -\frac{2V}{6\Omega} - \frac{1V}{3\Omega} - 6A \\ -\frac{1}{6\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{5\Omega} \right) \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= \frac{2V}{6\Omega} + \frac{5V}{5\Omega} + 4A \\ -0 \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 + \frac{1}{4\Omega} \cdot V_3 &= -4A + 6A \end{aligned} \right\}.$$



Slika 1.52a

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{6\Omega} \cdot V_2 &= -\frac{20}{3} A \\ -\frac{1}{6\Omega} \cdot V_1 + \frac{11}{30\Omega} \cdot V_2 &= \frac{16}{3} A \\ \frac{1}{4\Omega} \cdot V_3 &= 2A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_2 &= 3V_1 + 40V \\ -\frac{1}{6\Omega} \cdot V_1 + \frac{11}{30\Omega} \cdot V_2 &= \frac{16}{3} A \\ V_3 &= 8V \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 u drugu jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{6\Omega} \cdot V_1 + \frac{11}{30\Omega} \cdot (3V_1 + 40V) = \frac{16}{3} A \Rightarrow \frac{28}{30\Omega} \cdot V_1 = -\frac{28}{3} A \Rightarrow V_1 = -10V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_1 u izvedeni izraz za potencijal V_2 , dobija se:

$$V_2 = 10V.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 6Ω :

1. Električna kola stalnih struja

$$I_A = \frac{V_1 - (V_2 - 2V)}{6\Omega} = -3A.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 3Ω :

$$I_B = \frac{(V_1 + 1V) - 0}{3\Omega} = -3A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 5Ω :

$$I_C = \frac{(V_2 - 5V) - 0}{5\Omega} = 1A.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $2V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2V} = 2V \cdot I_A = -6W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $1V$ je:

$$P_{1V} = 1V \cdot I_B = -3W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $5V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5V} = -5V \cdot I_C = -5W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $6A$ je:

$$P_{6A} = (V_3 - V_1) \cdot 6A = 108W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $4A$ se može izračunati na sledeći način:

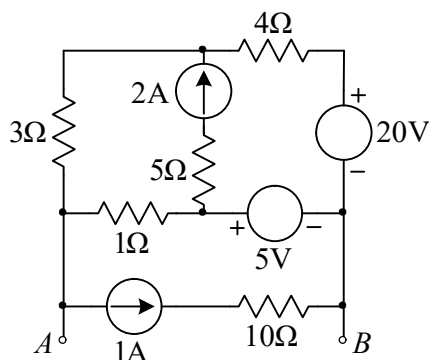
$$P_{4A} = (V_2 - V_3) \cdot 4A = 8W.$$

1.53. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.53.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .

c) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

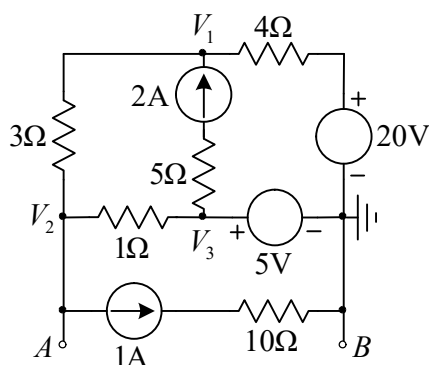
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.53

Rešenje:

a) S obzirom da u zadanom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 5V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 5V.



Slika 1.53a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.53a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.53a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 = I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 = I^{(2)} \\ V_3 = 5V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 = \frac{20V}{4\Omega} + 2A \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \\ V_3 = 5V \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{12\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 = 7A \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 + \frac{4}{3\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \\ V_3 = 5V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_2 = \frac{7}{4} V_1 - 21V \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 + \frac{4}{3\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \\ V_3 = 5V \end{array} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 i izračunate vrednosti za V_3 u drugu jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 + \frac{4}{3\Omega} \cdot \left(\frac{7}{4} V_1 - 21V \right) - \frac{1}{1\Omega} \cdot 5V = -1A \Rightarrow 2V_1 = 32V \Rightarrow V_1 = 16V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_1 u izvedeni izraz za potencijal V_2 , dobija se:

$$V_2 = 7V.$$

b) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$

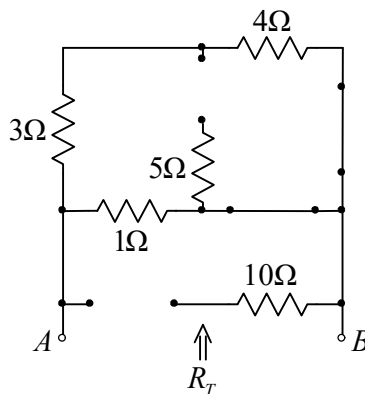
Napon U_{AB} se, na osnovu rezultata iz tačke **a)**, može predstaviti na sledeći način:

$$U_{AB} = V_2 - 0 = 7V,$$

tako da je:

$$U_T = U_{AB} = 7V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.53b:

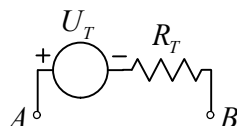


Slika 1.53b

$$R_T = 1\Omega \parallel (3\Omega + 4\Omega) = 1\Omega \parallel 7\Omega = \frac{7}{8}\Omega.$$

1. Električna kola stalnih struja

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Theveninov generator imati izgled prikazan na slici 1.53c:



Slika 1.53c

c) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 20V se može izračunati na sledeći način:

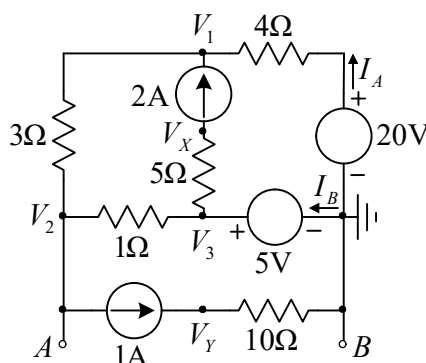
$$P_{20V} = 20V \cdot I_A,$$

gde je I_A struja koja je označena na slici 1.53d, koja se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω :

$$I_A = \frac{(0 + 20V) - V_1}{4\Omega} = 1A,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{20V} = 20V \cdot I_A = 20W.$$



Slika 1.53d

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 5V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5V} = 5V \cdot I_B,$$

gde je I_B struja koja je označena na slici 1.53d, koja se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za referentni čvor:

$$I_B = 1A - I_A = 0,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{5V} = 5V \cdot I_B = 0.$$

1. Električna kola stalnih struja

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 2A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = (V_1 - V_X) \cdot 2A,$$

gde je V_X potencijal donjeg priključka idealnog strujnog generatora struje 2A koji je označen na slici 1.53d, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_3 - 5\Omega \cdot 2A = -5V,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (V_1 - V_X) \cdot 2A = 42W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 1A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{1A} = (V_Y - V_2) \cdot 1A,$$

gde je V_Y potencijal desnog priključka idealnog strujnog generatora struje 1A koji je označen na slici 1.53d, i koji se može odrediti na sledeći način:

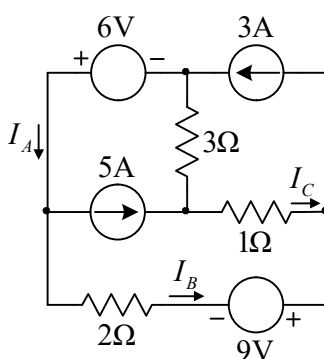
$$V_Y = 0 + 10\Omega \cdot 1A = 10V,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{1A} = (V_Y - V_2) \cdot 1A = 3W.$$

1.54. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.54.

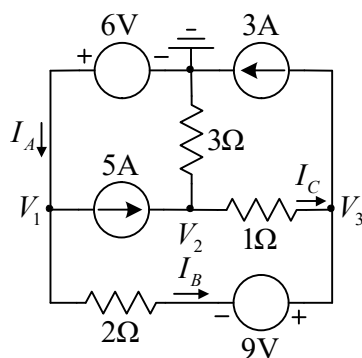
b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti struje I_A , I_B i I_C .



Slika 1.54

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 6V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 6V.



Slika 1.54a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.54a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.54a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 6V \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 = I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I^{(3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 6V \\ -0 \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = 5A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_3 = \frac{9V}{2\Omega} - 3A \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 6V \\ \frac{4}{3\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = 5A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 = \frac{3}{2}A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 6V \\ V_3 = \frac{4}{3}V_2 - 5V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 = \frac{3}{2}A \end{array} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_3 i izračunate vrednosti za V_1 u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{2\Omega} \cdot 6V - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot \left(\frac{4}{3}V_2 - 5V \right) = \frac{3}{2}A \Rightarrow V_2 = 12V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_3 , dobija se:

1. Električna kola stalnih struja

$$V_3 = 11\text{V}.$$

b) Struja I_B se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_B = \frac{V_1 - (V_3 - 9\text{V})}{2\Omega} = 2\text{A}.$$

Struja I_C se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

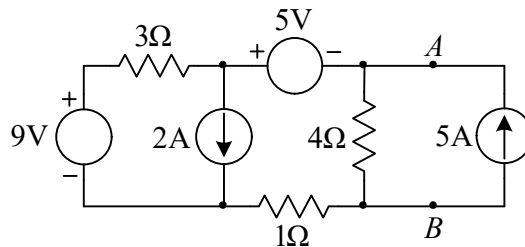
$$I_C = \frac{V_2 - V_3}{1\Omega} = 1\text{A}.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_1 :

$$I_A = I_B + 5\text{A} = 7\text{A}.$$

1.55. a) Za kolo sa slike 1.55 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koju predaje idealni strujni generator struje 5A .

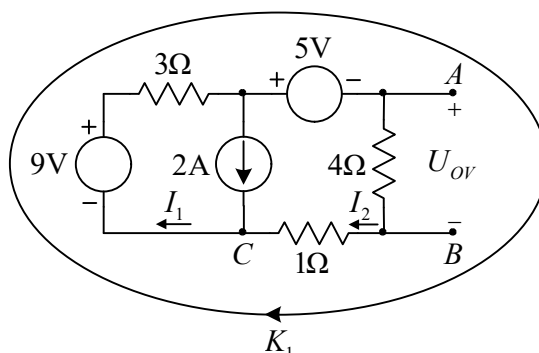


Slika 1.55

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.55a:

$$U_T = U_{OV}.$$



Slika 1.55a

Za kolo sa slike 1.55a se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na otpornicima otpornosti 1Ω i 3Ω izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$-I_2 \cdot 1\Omega + 9V - I_1 \cdot 3\Omega - 5V - U_{OV} = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C glasi:

$$I_1 = I_2 + 2A,$$

a ako se struja I_2 izrazi preko Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω , dobija se da je:

$$I_2 = \frac{U_{OV}}{4\Omega},$$

tako da se struja I_1 može izraziti na sledeći način:

$$I_1 = \frac{U_{OV}}{4\Omega} + 2A.$$

Uvrštavanjem poslednjeg izraza za struju I_1 i izraza za struju I_2 dobijenog preko Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 , sledi da je:

$$-\frac{U_{OV}}{4\Omega} \cdot 1\Omega + 9V - \left(\frac{U_{OV}}{4\Omega} + 2A \right) \cdot 3\Omega - 5V - U_{OV} = 0.$$

Napon U_{OV} se na osnovu prethodne jednačine može izračunati na sledeći način:

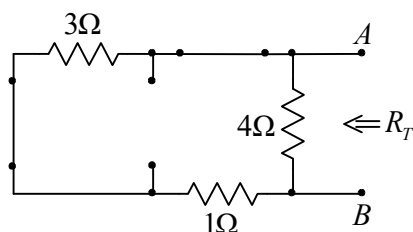
$$2U_{OV} = -2V \Rightarrow U_{OV} = -1V,$$

tako da je konačno:

$$U_T = U_{OV} = -1V.$$

1. Električna kola stalnih struja

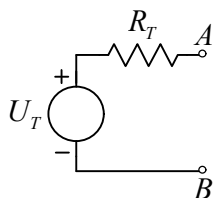
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.55b:



Slika 1.55b

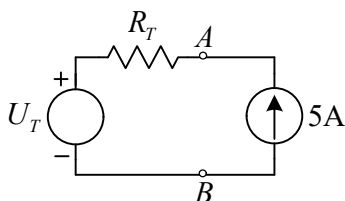
$$R_T = (1\Omega + 3\Omega) \parallel 4\Omega = 2\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.55a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.55c:



Slika 1.55c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.55d:



Slika 1.55d

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 5A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5A} = U_{AB} \cdot 5A.$$

Napon U_{AB} u kolu sa slike 1.55d se može odrediti na sledeći način:

$$U_{AB} = U_T + R_T \cdot 5A = 9V,$$

tako da se dobija da je:

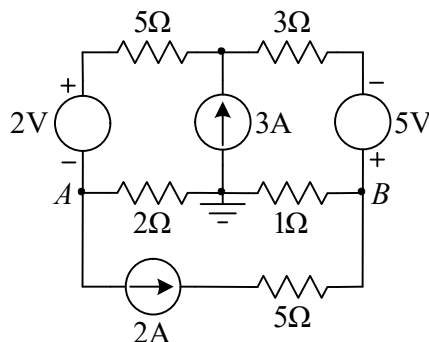
$$P_{5A} = U_{AB} \cdot 5A = 45W.$$

1. Električna kola stalnih struja

1.56. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.56. u odnosu na označeni referentni čvor.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje. Odrediti i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω .

c) Odrediti ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B .

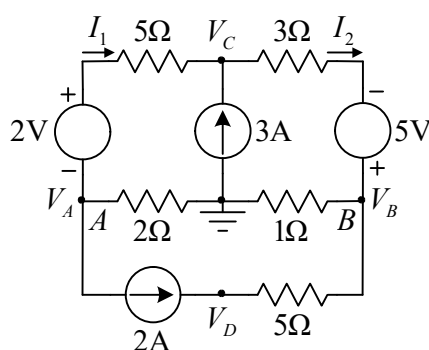


Slika 1.56

Rešenje:

a) Ukoliko se potencijali čvorova u zadatom kolu označe na način prikazan na slici 1.56a, po metodu potencijala čvorova se za to kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{AA}V_A + G_{AB}V_B + G_{AC}V_C &= I^{(A)} \\ G_{BA}V_A + G_{BB}V_B + G_{BC}V_C &= I^{(B)} \\ G_{CA}V_A + G_{CB}V_B + G_{CC}V_C &= I^{(C)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_A - 0 \cdot V_B - \frac{1}{5\Omega} \cdot V_C &= -\frac{2V}{5\Omega} - 2A \\ -0 \cdot V_A + \left(\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_B - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_C &= \frac{5V}{3\Omega} + 2A \\ -\frac{1}{5\Omega} \cdot V_A - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_B + \left(\frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_C &= \frac{2V}{5\Omega} - \frac{5V}{3\Omega} + 3A \end{aligned} \right\}.$$



Slika 1.56a

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{10\Omega} \cdot V_A - \frac{1}{5\Omega} \cdot V_C &= -\frac{12}{5} \text{ A} \\ \frac{4}{3\Omega} \cdot V_B - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_C &= \frac{11}{3} \text{ A} \\ -\frac{1}{5\Omega} \cdot V_A - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_B + \frac{8}{15\Omega} \cdot V_C &= \frac{26}{15} \text{ A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_A &= \frac{2}{7} V_C - \frac{24}{7} \text{ V} \\ V_B &= \frac{1}{4} V_C + \frac{11}{4} \text{ V} \\ -\frac{1}{5\Omega} \cdot V_A - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_B + \frac{8}{15\Omega} \cdot V_C &= \frac{26}{15} \text{ A} \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenih izraza za V_A i V_B u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{5\Omega} \cdot \left(\frac{2}{7} V_C - \frac{24}{7} \text{ V} \right) - \frac{1}{3\Omega} \cdot \left(\frac{1}{4} V_C + \frac{11}{4} \text{ V} \right) + \frac{8}{15\Omega} \cdot V_C = \frac{26}{15} \text{ A} \Rightarrow \frac{165}{420\Omega} \cdot V_C = \frac{825}{420} \text{ A},$$

tako da je:

$$V_C = 5 \text{ V}.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_C u izvedene izraze za potencijale V_A i V_B , dobija se:

$$V_A = -2 \text{ V}, \quad V_B = 4 \text{ V}.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 2V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2V} = 2 \text{ V} \cdot I_1,$$

gde je I_1 struja koja je označena na slici 1.56a, koja se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 5Ω koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom napona 2V:

$$I_1 = \frac{(V_A + 2 \text{ V}) - V_C}{5\Omega} = -1 \text{ A},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{2V} = 2 \text{ V} \cdot I_1 = -2 \text{ W}.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 5V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5V} = 5 \text{ V} \cdot I_2,$$

gde je I_2 struja koja je označena na slici 1.56a, koja se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 3Ω :

$$I_2 = \frac{V_C - (V_B - 5 \text{ V})}{3\Omega} = 2 \text{ A},$$

tako da se dobija da je:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{5V} = 5V \cdot I_2 = 10W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 3A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3A} = (V_C - 0) \cdot 3A = 15W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 2A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = (V_D - V_A) \cdot 2A,$$

gde je V_D potencijal desnog priključka idealnog strujnog generatora struje 2A koji je označen na slici 1.56a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_D = V_B + 5\Omega \cdot 2A = 14V,$$

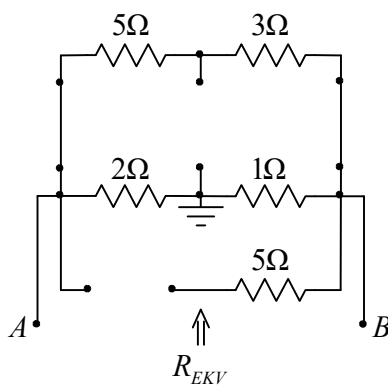
tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (V_D - V_A) \cdot 2A = 32W.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$P_{2\Omega} = \frac{(V_A - 0)^2}{2\Omega} = 2W.$$

c) Ekvivalentna otpornost između tačaka A i B se određuje na osnovu šeme sa slike 1.56b:

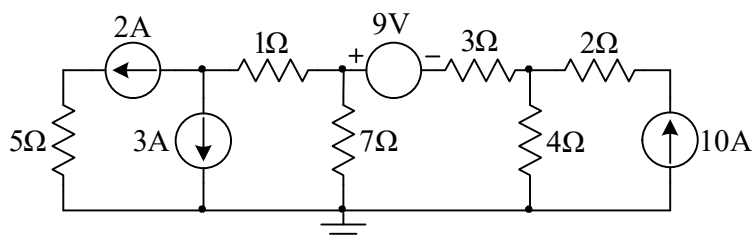


Slika 1.56b

$$R_{EKV} = (5\Omega + 3\Omega) \parallel (2\Omega + 1\Omega) = 8\Omega \parallel 3\Omega = \frac{24}{11}\Omega.$$

1.57. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.57. u odnosu na označeni referentni čvor.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

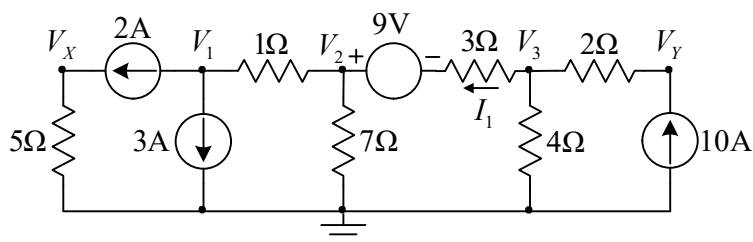


Slika 1.57

Rešenje:

a) Ukoliko se potencijali čvorova u zadatom kolu označe na način prikazan na slici 1.57a, po metodu potencijala čvorova se za to kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= -2A - 3A \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{7\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 &= \frac{9V}{3\Omega} \\ -0 \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) \cdot V_3 &= -\frac{9V}{3\Omega} + 10A \end{aligned} \right\}.$$



Slika 1.57a

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 &= -5A \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \frac{31}{21\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 &= 3A \\ -\frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \frac{7}{12\Omega} \cdot V_3 &= 7A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= V_2 - 5V \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \frac{31}{21\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 &= 3A \\ V_3 &= \frac{4}{7}V_2 + 12V \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenih izraza za V_1 i V_3 u drugu jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{1\Omega} \cdot (V_2 - 5V) + \frac{31}{21\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot \left(\frac{4}{7}V_2 + 12V \right) = 3A \Rightarrow \frac{6}{21\Omega} \cdot V_2 = 2A \Rightarrow V_2 = 7V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedene izraze za potencijale V_1 i V_3 , dobija se:

1. Električna kola stalnih struja

$$V_1 = 2\text{V}, V_3 = 16\text{V}.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 9V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{9\text{V}} = 9\text{V} \cdot I_1,$$

gde je I_1 struja koja je označena na slici 1.57a, koja se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 3Ω :

$$I_1 = \frac{V_3 - (V_2 - 9\text{V})}{3\Omega} = 6\text{A},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{9\text{V}} = 9\text{V} \cdot I_1 = 54\text{W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 2A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2\text{A}} = (V_X - V_1) \cdot 2\text{A},$$

gde je V_X potencijal levog priključka idealnog strujnog generatora struje 2A koji je označen na slici 1.57a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = 0 + 5\Omega \cdot 2\text{A} = 10\text{V},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{2\text{A}} = (V_X - V_1) \cdot 2\text{A} = 16\text{W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 3A je:

$$P_{3\text{A}} = (0 - V_1) \cdot 3\text{A} = -6\text{W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 10A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{10\text{A}} = (V_Y - 0) \cdot 10\text{A},$$

gde je V_Y potencijal gornjeg priključka idealnog strujnog generatora struje 10A koji je označen na slici 1.57a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_Y = V_3 + 2\Omega \cdot 10\text{A} = 36\text{V},$$

tako da se dobija da je:

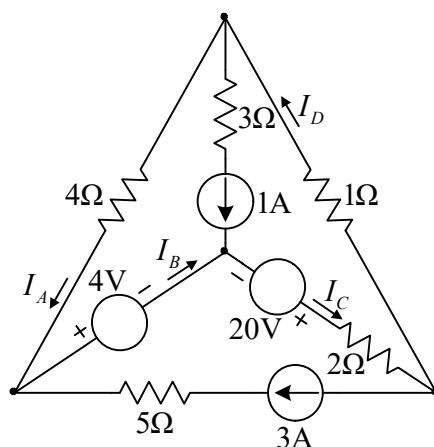
$$P_{10\text{A}} = V_Y \cdot 10\text{A} = 360\text{W}.$$

1. Električna kola stalnih struja

1.58. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.58.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti struje I_A , I_B , I_C i I_D .

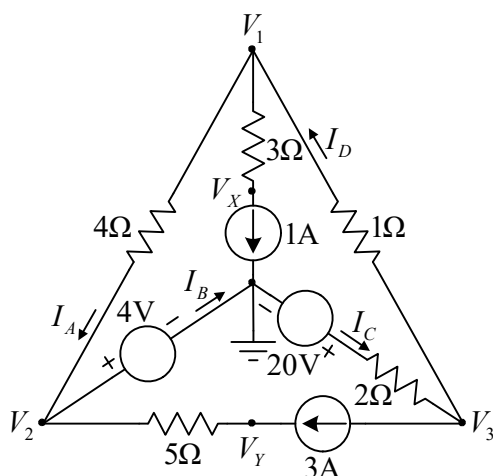
c) Korišćenjem rezultata iz tačaka **a)** i **b)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.



Slika 1.58

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 4V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 4V.



Slika 1.58a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.58a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.58a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 = I^{(1)} \\ V_2 = 4V \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I^{(3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \\ V_2 = 4V \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_3 = \frac{20V}{2\Omega} - 3A \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{4\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \\ V_2 = 4V \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 = 7A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{5}{4\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \\ V_2 = 4V \\ V_1 = \frac{3}{2}V_3 - 7V \end{array} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_1 i izračunate vrednosti za V_2 u prvu jednačinu, sledi:

$$\frac{5}{4\Omega} \cdot \left(\frac{3}{2}V_3 - 7V \right) - \frac{1}{4\Omega} \cdot 4V - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = -1A \Rightarrow \frac{7}{8\Omega} \cdot V_3 = \frac{35}{4}A \Rightarrow V_3 = 10V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_3 u izvedeni izraz za potencijal V_1 , dobija se:

$$V_1 = 8V.$$

b) Struja I_A se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω :

$$I_A = \frac{V_1 - V_2}{4\Omega} = 1A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_C = \frac{(0 + 20V) - V_3}{2\Omega} = 5A.$$

Struja I_D se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_D = \frac{V_3 - V_1}{1\Omega} = 2A.$$

Struja I_B se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_2 :

$$I_B = I_A + 3A = 4A.$$

c) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $4V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{4V} = 4V \cdot (-I_B) = -16W.$$

1. Električna kola stalnih struja

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 20V je:

$$P_{20V} = 20V \cdot I_C = 100W .$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 1A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{1A} = (0 - V_X) \cdot 1A ,$$

gde je V_X potencijal gornjeg priključka idealnog strujnog generatora struje 1A koji je označen na slici 1.58a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_1 - 3\Omega \cdot 1A = 5V ,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{1A} = (-V_X) \cdot 1A = -5W .$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 3A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3A} = (V_Y - V_3) \cdot 3A ,$$

gde je V_Y potencijal levog priključka idealnog strujnog generatora struje 3A koji je označen na slici 1.58a, i koji se može odrediti na sledeći način:

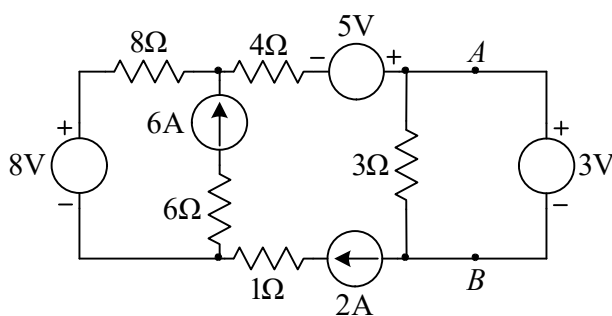
$$V_Y = V_2 + 5\Omega \cdot 3A = 19V ,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{3A} = (V_Y - V_3) \cdot 3A = 27W .$$

1.59. a) Za kolo sa slike 1.59 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator napona 3V .



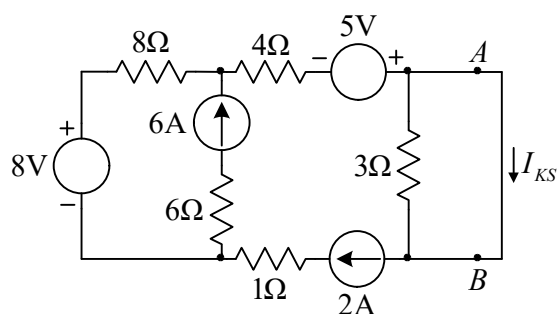
Slika 1.59

Rešenje:

a) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.59a.



Slika 1.59a

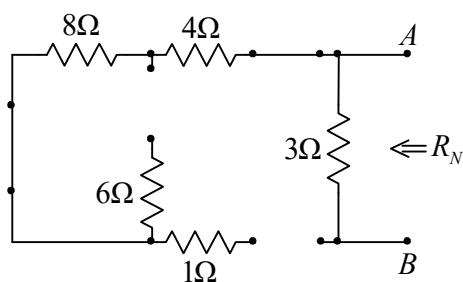
S obzirom da su tačke A i B kratko spojene, napon na otporniku otpornosti 3Ω će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz taj otpornik neće proticati struja. Imajući to u vidu, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor B važi:

$$I_{KS} = 2A,$$

tako da je konačno:

$$I_N = I_{KS} = 2A.$$

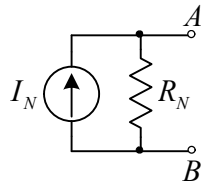
Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.59b:



Slika 1.59b

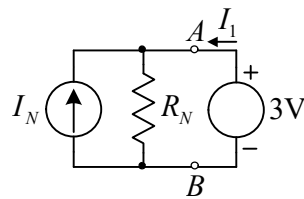
$$R_N = 3\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.59a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.59c:



Slika 1.59c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.59d:



Slika 1.59d

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 3V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3V} = 3V \cdot I_1,$$

gde je I_1 struja koja je označena na slici 1.59d, i koja se može odrediti pomoću jednačine napisane po Kirhofovom zakonu za struje za čvor A , u kojoj je struja kroz otpornik otpornosti R_N izražena preko Omovog zakona:

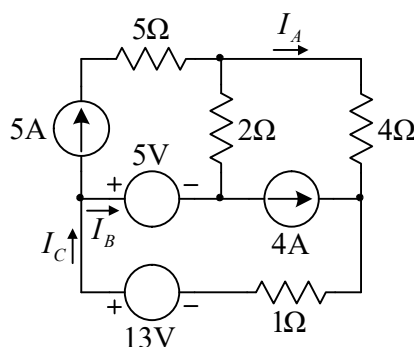
$$I_1 = \frac{3V}{R_N} - I_N = -1A,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{3V} = 3V \cdot I_1 = -3W.$$

1.60. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.60. Odrediti i struje I_A , I_B i I_C .

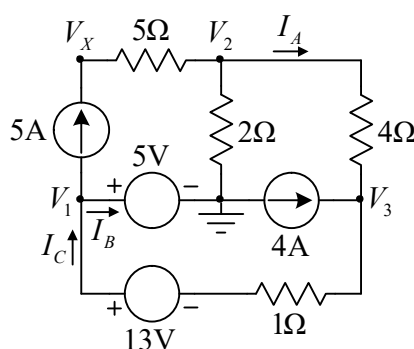
b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.



Slika 1.60

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 5V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 5V.



Slika 1.60a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.60a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.60a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 5V \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 5V \\ -0 \cdot V_1 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_3 &= 5A \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_3 &= -\frac{13V}{1\Omega} + 4A \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = 5V \\ \frac{3}{4\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_3 = 5A \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 + \frac{5}{4\Omega} \cdot V_3 = -9A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 5V \\ V_3 = 3V_2 - 20V \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 + \frac{5}{4\Omega} \cdot V_3 = -9A \end{array} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_3 i izračunate vrednosti za V_1 u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{1\Omega} \cdot 5V - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 + \frac{5}{4\Omega} \cdot (3V_2 - 20V) = -9A \Rightarrow \frac{14}{4\Omega} \cdot V_2 = 21A \Rightarrow V_2 = 6V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_3 , dobija se:

$$V_3 = -2V.$$

Struja I_A se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω :

$$I_A = \frac{V_2 - V_3}{4\Omega} = 2A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_C = \frac{V_3 - (V_1 - 13V)}{1\Omega} = 6A.$$

Struja I_B se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_1 :

$$I_B = I_C - 5A = 1A.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $5V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5V} = 5V \cdot (-I_B) = -5W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $13V$ je:

$$P_{13V} = 13V \cdot I_C = 78W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $5A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5A} = (V_X - V_1) \cdot 5A,$$

gde je V_X potencijal gornjeg priključka idealnog strujnog generatora struje $5A$ koji je označen na slici 1.60a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_2 + 5\Omega \cdot 5A = 31V,$$

1. Električna kola stalnih struja

tako da se dobija da je:

$$P_{5A} = (V_X - V_1) \cdot 5A = 130W.$$

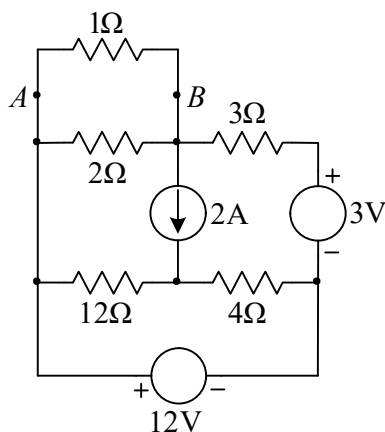
Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 4A je:

$$P_{4A} = (V_3 - 0) \cdot 4A = -8W.$$

1.61. a) Za kolo sa slike 1.61 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola ispod tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 1Ω .

c) Ako se umesto otpornika otpornosti 1Ω poveže otpornik otpornosti R_p , kolika treba da bude otpornost R_p da bi se na njoj razvijala maksimalna moguća snaga?



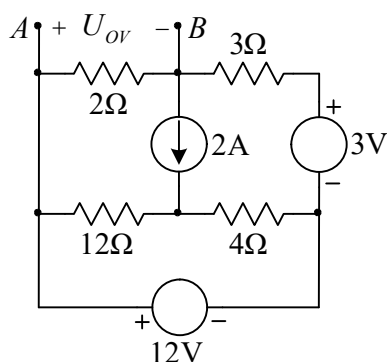
Slika 1.61

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola ispod tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola ispod tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.61a:

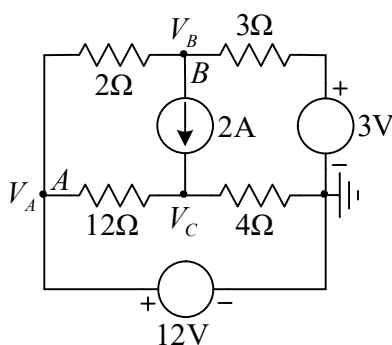
$$U_T = U_{OV}.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.61a

Napon otvorene veze U_{OV} u kolu sa slike 1.61a se može odrediti primenom metoda potencijala čvorova. S obzirom da u tom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 12V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 12V.



Slika 1.61b

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.61b, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.61b, po metodu potencijala čvorova se za kolo sa slike 1.61b može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} V_A = 12V \\ G_{BA}V_A + G_{BB}V_B + G_{BC}V_C = I^{(B)} \\ G_{CA}V_A + G_{CB}V_B + G_{CC}V_C = I^{(C)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = 12V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_A + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_B - 0 \cdot V_C = \frac{3V}{3\Omega} - 2A \\ -\frac{1}{12\Omega} \cdot V_A - 0 \cdot V_B + \left(\frac{1}{12\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) \cdot V_C = 2A \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} V_A = 12\text{V} \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_A + \frac{5}{6\Omega} \cdot V_B = -1\text{A} \\ -\frac{1}{12\Omega} \cdot V_A + \frac{1}{3\Omega} \cdot V_C = 2\text{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = 12\text{V} \\ V_B = \frac{3}{5}V_A - \frac{6}{5}\text{V} \\ V_C = \frac{1}{4}V_A + 6\text{V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = 12\text{V} \\ V_B = 6\text{V} \\ V_C = 9\text{V} \end{array} \right\}.$$

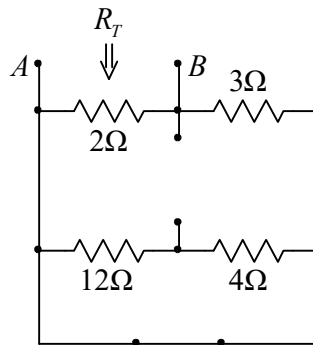
Napon U_{OV} (označen na slici 1.61a) se na osnovu izračunatih potencijala V_A i V_B može odrediti na sledeći način:

$$U_{OV} = V_A - V_B = 6\text{V},$$

tako da je konačno:

$$U_T = U_{OV} = 6\text{V}.$$

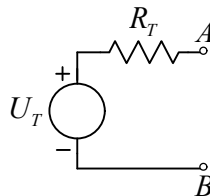
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.61c:



Slika 1.61c

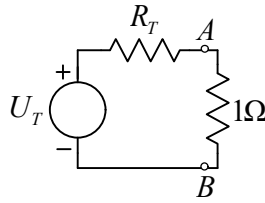
$$R_T = 2\Omega \parallel [3\Omega + ((12\Omega + 4\Omega) \parallel 0\Omega)] = 2\Omega \parallel [3\Omega + 0\Omega] = 2\Omega \parallel 3\Omega = \frac{6}{5}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.61a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.61d:



Slika 1.61d

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.61e:



Slika 1.61e

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 1Ω se može izračunati na sledeći način:

$$P_{1\Omega} = \frac{U_{AB}^2}{1\Omega},$$

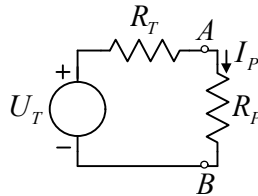
pri čemu se napon U_{AB} može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$U_{AB} = \frac{1\Omega}{1\Omega + R_T} \cdot U_T = \frac{30}{11} \text{ V},$$

tako da je konačno:

$$P_{1\Omega} = \frac{900}{121} \text{ W}.$$

c) Ako se umesto otpornika otpornosti 1Ω poveže otpornik otpornosti R_p , a deo kola iz postavke zadatka ispod tačaka A i B predstavi ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, dobija se kolo prikazano na slici 1.61f:



Slika 1.61f

Snaga koja se disipira na otporniku R_p se može izraziti na sledeći način:

$$P_{R_p} = I_p^2 \cdot R_p = \left(\frac{U_T}{R_T + R_p} \right)^2 \cdot R_p.$$

Otpornost R_p za koju je snaga P_{R_p} maksimalna se određuje iz uslova da je za tu vrednost R_p prvi izvod P_{R_p} po R_p jednak nuli:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = 0.$$

Dalje sledi:

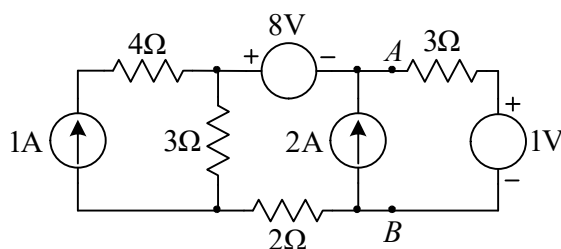
$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = \frac{d}{dR_p} \left[\frac{U_T^2 \cdot R_p}{(R_T + R_p)^2} \right] = U_T^2 \cdot \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = U_T^2 \cdot \frac{R_T^2 - R_p^2}{(R_T + R_p)^4} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$R_p = R_T = \frac{6}{5} \Omega.$$

1.62. a) Za kolo sa slike 1.62 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koju predaje idealni naponski generator napona $1V$.



Slika 1.62

Rešenje:

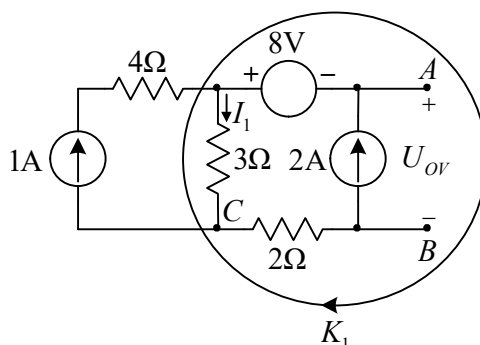
a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.62a:

$$U_T = U_{OV}.$$

Za kolo sa slike 1.62a se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na otpornicima otpornosti 2Ω i 3Ω izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$2A \cdot 2\Omega + I_1 \cdot 3\Omega - 8V - U_{OV} = 0.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.62a

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C glasi:

$$I_1 = 1\text{A} + 2\text{A} = 3\text{A}.$$

Uvrštavanjem izračunate vrednosti za struju I_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 , sledi da je:

$$2\text{A} \cdot 2\Omega + 3\text{A} \cdot 3\Omega - 8\text{V} - U_{ov} = 0.$$

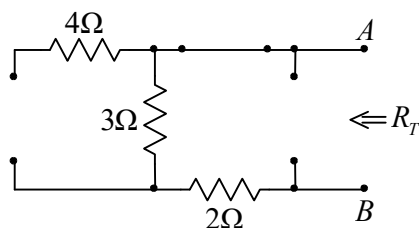
Na osnovu prethodne jednačine se može izračunati napon U_{ov} :

$$U_{ov} = 5\text{V},$$

tako da je konačno:

$$U_T = U_{ov} = 5\text{V}.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.62b:

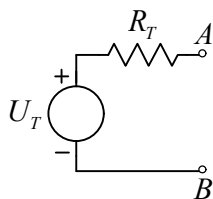


Slika 1.62b

$$R_T = 3\Omega + 2\Omega = 5\Omega.$$

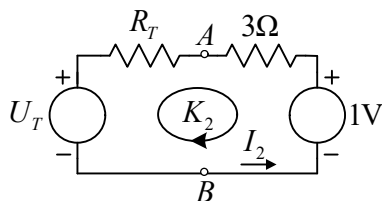
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.62a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.62c:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.62c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.62d:



Slika 1.62d

Za kolo sa slike 1.62d se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_2 (za smer obilaska konture označen na slici 1.62d) u kojoj su naponi na otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$U_T + I_2 \cdot R_T + I_2 \cdot 3\Omega - 1V = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$I_2 = \frac{1V - U_T}{R_T + 3\Omega} = -0.5A.$$

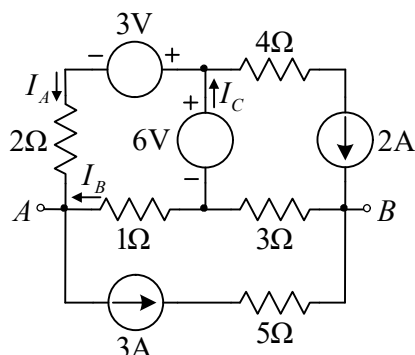
Konačno, snaga koju predaje idealni naponski generator napona 1V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{1V} = I_2 \cdot 1V = -0.5W.$$

1.63. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.63. Odrediti i struje I_A , I_B i I_C .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .

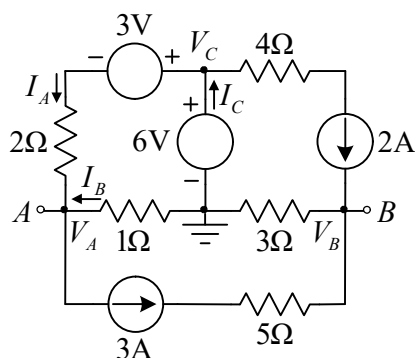
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.63

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 6V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 6V.



Slika 1.63a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.63a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.63a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{AA}V_A + G_{AB}V_B + G_{AC}V_C &= I^{(A)} \\ G_{BA}V_A + G_{BB}V_B + G_{BC}V_C &= I^{(B)} \\ V_C &= 6V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_A - 0 \cdot V_B - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_C &= -\frac{3V}{2\Omega} - 3A \\ -0 \cdot V_A + \frac{1}{3\Omega} \cdot V_B - 0 \cdot V_C &= 2A + 3A \\ V_C &= 6V \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{2\Omega} \cdot V_A - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_C = -\frac{9}{2} \text{ A} \\ \frac{1}{3\Omega} \cdot V_B = 5 \text{ A} \\ V_C = 6 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = \frac{1}{3} V_C - 3 \text{ V} \\ V_B = 15 \text{ V} \\ V_C = 6 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = -1 \text{ V} \\ V_B = 15 \text{ V} \\ V_C = 6 \text{ V} \end{array} \right\}.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{(V_C - 3\text{V}) - V_A}{2\Omega} = 2 \text{ A}.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_B = \frac{0 - V_A}{1\Omega} = 1 \text{ A}.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_C :

$$I_C = I_A + 2 \text{ A} = 4 \text{ A}.$$

b) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$

Napon U_{AB} se, na osnovu rezultata iz tačke **a)**, može predstaviti na sledeći način:

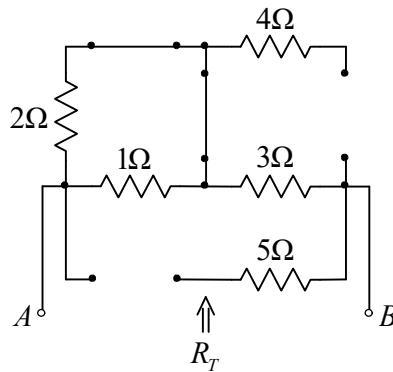
$$U_{AB} = V_A - V_B = -16 \text{ V},$$

tako da je:

$$U_T = U_{AB} = -16 \text{ V}.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.63b:

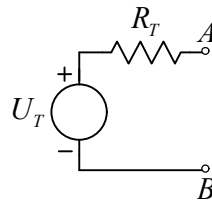
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.63b

$$R_T = (2\Omega \parallel 1\Omega) + 3\Omega = \frac{11}{3}\Omega.$$

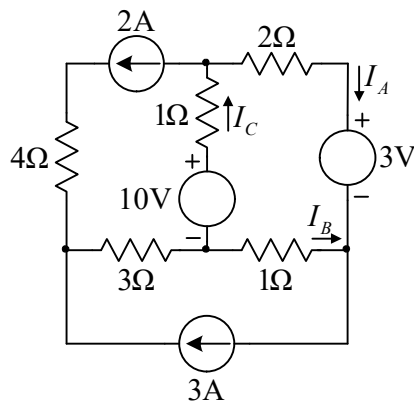
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.63c:



Slika 1.63c

1.64. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.64. Odrediti i struje I_A , I_B i I_C .

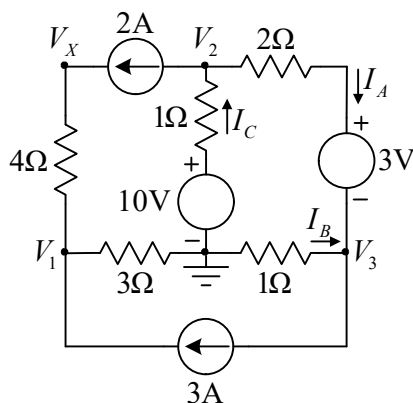
b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.



Slika 1.64

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu ne postoji nijedan idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora, referentni čvor se može proizvoljno izabrati.



Slika 1.64a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.64a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.64a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= 2A + 3A \\ -0 \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_3 &= \frac{10V}{1\Omega} + \frac{3V}{2\Omega} - 2A \\ -0 \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_3 &= -\frac{3V}{2\Omega} - 3A \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3\Omega} \cdot V_1 &= 5A \\ \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_3 &= \frac{19}{2} A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 &= -\frac{9}{2} A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 15V \\ V_3 &= 3V_2 - 19V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 &= -\frac{9}{2} A \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_3 u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot (3V_2 - 19V) = -\frac{9}{2} A \Rightarrow 4V_2 = 24V \Rightarrow V_2 = 6V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_3 , dobija se:

1. Električna kola stalnih struja

$$V_3 = -1V .$$

Struja I_A se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{V_2 - (V_3 + 3\Omega)}{2\Omega} = 2A .$$

Struja I_B se može odrediti primenom Omovog zakona za horizontalno postavljeni otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_B = \frac{0 - V_3}{1\Omega} = 1A .$$

Struja I_C se može izračunati pomoću Omovog zakona za vertikalno postavljeni otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_C = \frac{(0 + 10V) - V_2}{1\Omega} = 4A .$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $10V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{10V} = 10V \cdot I_C = 40W .$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $3V$ je:

$$P_{3V} = 3V \cdot (-I_A) = -6W .$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = (V_X - V_2) \cdot 2A ,$$

gde je V_X potencijal levog priključka idealnog strujnog generatora struje $2A$ koji je označen na slici 1.64a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_1 + 4\Omega \cdot 2A = 23V ,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (V_X - V_2) \cdot 2A = 34W .$$

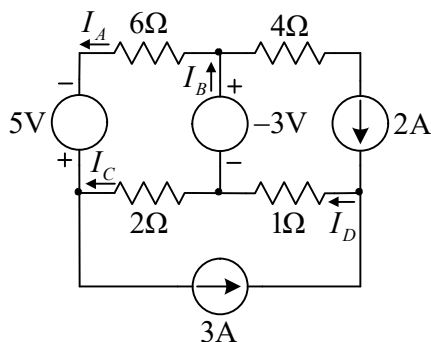
Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ je:

$$P_{3A} = (V_1 - V_3) \cdot 3A = 48W .$$

1. Električna kola stalnih struja

1.65. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.65. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

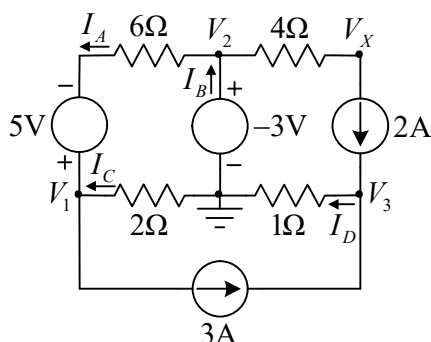
b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje. Odrediti i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω .



Slika 1.65

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona $-3V$), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona $-3V$.



Slika 1.65a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.65a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.65a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ V_2 &= -3V \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{6\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= \frac{5V}{6\Omega} - 3A \\ V_2 &= -3V \\ -0 \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 + \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= 2A + 3A \end{aligned} \right\}.$$

1. Električna kola stalnih struja

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{6\Omega} \cdot V_2 = -\frac{13}{6} \text{ A} \\ V_2 = -3\text{ V} \\ \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 = 5\text{ A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{4} V_2 - \frac{13}{4} \text{ V} \\ V_2 = -3\text{ V} \\ V_3 = 5\text{ V} \end{array} \right\}.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_1 , dobija se:

$$V_1 = -4\text{ V}.$$

Struja I_A se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 6Ω :

$$I_A = \frac{V_2 - (V_1 - 5\text{ V})}{6\Omega} = 1\text{ A}.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_C = \frac{0 - V_1}{2\Omega} = 2\text{ A}.$$

Struja I_D se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_D = \frac{V_3 - 0}{1\Omega} = 5\text{ A}.$$

Struja I_B se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_2 :

$$I_B = I_A + 2\text{ A} = 3\text{ A}.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 5 V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5\text{ V}} = 5\text{ V} \cdot I_A = 5\text{ W}.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona -3 V je:

$$P_{-3\text{ V}} = -3\text{ V} \cdot I_B = -9\text{ W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 2 A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2\text{ A}} = (V_3 - V_X) \cdot 2\text{ A},$$

gde je V_X potencijal gornjeg priključka idealnog strujnog generatora struje 2 A koji je označen na slici 1.65a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_2 - 4\Omega \cdot 2\text{ A} = -11\text{ V},$$

1. Električna kola stalnih struja

tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (V_3 - V_x) \cdot 2A = 32W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 3A je:

$$P_{3A} = (V_3 - V_1) \cdot 3A = 27W.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$P_{2\Omega} = I_C^2 \cdot 2\Omega = 8W.$$

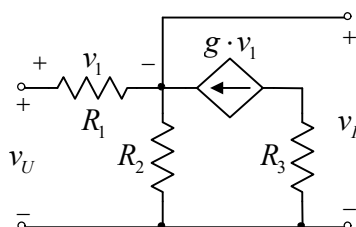
1.66. Za kolo sa slike 1.66 je poznato $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 100\Omega$ i $g = 10S$.

a) Odrediti ekvivalentnu otpornost koja se vidi između ulaznih priključaka kola.

b) Odrediti ekvivalentnu otpornost koja se vidi između izlaznih priključaka kola.

c) Odrediti naponsko pojačanje $a = v_I / v_U$.

d) Korišćenjem rezultata iz prethodnih tačaka, odrediti napon na potrošaču otpornosti $R_p = 0.5k\Omega$ koji bi bio povezan između izlaznih priključaka kola, ako bi se kolo pobuđivalo realnim naponskim generatorom povezanim između ulaznih priključaka kola, koji neopterećen daje napon $v_G = 10V$ i koji ima unutrašnju otpornost $R_G = 200\Omega$.

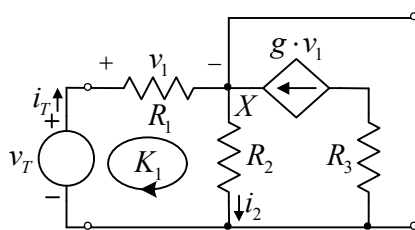


Slika 1.66

Rešenje:

a) Priključci između kojih je na slici 1.66 označen napon v_U predstavljaju ulazne priključke kola. Pošto u kolu sa slike 1.66 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost koja se vidi između ulaznih priključaka kola se određuje na osnovu šeme sa slike 1.66a kao:

$$R_U = \frac{v_T}{i_T}.$$



Slika 1.66a

Za kolo sa slike 1.66a se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.66a) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$v_T - i_T R_1 - i_2 R_2 = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.66a se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , koja glasi:

$$i_T + g \cdot v_1 = i_2.$$

Imajući u vidu da je po Omovom zakonu za otpornik otpornosti R_1 :

$$v_1 = i_T \cdot R_1,$$

jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X se može napisati u obliku:

$$i_2 = i_T + g \cdot i_T \cdot R_1 \Rightarrow i_2 = i_T (1 + g R_1),$$

tako da se uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_2 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 dobija da je:

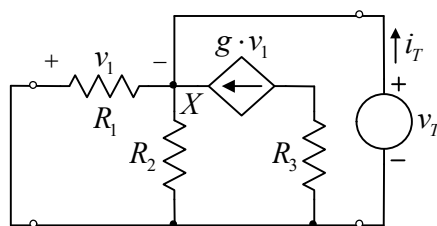
$$v_T - i_T R_1 - i_T R_2 (1 + g R_1) = 0.$$

Konačno, tražena ekvivalentna otpornost koja se vidi između ulaznih priključaka kola je:

$$R_U = \frac{v_T}{i_T} = R_1 + (1 + g R_1) R_2 = 1.0011 \text{ M}\Omega \approx 1 \text{ M}\Omega.$$

b) Priključci između kojih je na slici 1.66 označen napon v_1 predstavljaju izlazne priključke kola. Pošto u kolu sa slike 1.66 postoji zavisni generator, ekvivalentna otpornost koja se vidi između izlaznih priključaka kola se određuje na osnovu šeme sa slike 1.66b kao:

$$R_I = \frac{v_T}{i_T}.$$



Slika 1.66b

S obzirom da se pri određivanju ekvivalentne otpornosti koja se vidi između izlaznih priključaka kola podrazumeva da je između ulaznih priključaka kola povezan nezavisni idealni naponski generator napona v_U i s obzirom da se pri formiranju šeme za određivanje ekvivalentne otpornosti anuliraju svi nezavisni generatori, u kolu sa slike 1.66b su ulazni priključci povezani kratkim spojem (kojim je zamenjen nezavisni idealni naponski generator napona v_U u postupku anuliranja). Za kolo sa slike 1.66b se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , u kojoj je struja kroz paralelnu vezu otpornika R_1 i R_2 izražena preko Omovog zakona:

$$i_T + g \cdot v_1 = \frac{v_T}{R_1 \parallel R_2}.$$

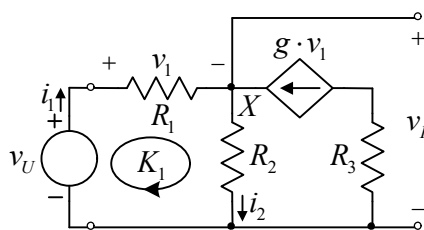
Imajući u vidu da je $v_1 = -v_T$, prethodna jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X se može napisati u obliku:

$$i_T - g \cdot v_T = \frac{v_T}{R_1 \parallel R_2} \Rightarrow i_T = v_T \left(g + \frac{1}{R_1 \parallel R_2} \right) = v_T \left(g + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

tako da je tražena ekvivalentna otpornost koja se vidi između izlaznih priključaka kola:

$$R_I = \frac{v_T}{i_T} = \frac{1}{g + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 0.09989\Omega \approx 0.1\Omega.$$

c) Za potrebe određivanja naponskog pojačanja $a = v_I / v_U$, na slici 1.66c je predstavljeno kolo iz postavke zadatka uz dodatak nezavisnog idealnog naponskog generatora napona v_U koji je zadužen za generisanje ulaznog napona. Takođe, dodate su i oznake za struje koje protiču kroz otpornike otpornosti R_1 i R_2 (pri čemu su oznake za te struje i njihovi referentni smerovi proizvoljno usvojeni):



Slika 1.66c

Za kolo sa slike 1.66c se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.66c) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$v_U - i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0.$$

Pored toga, za kolo sa slike 1.66c se može napisati i jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X , koja glasi:

$$i_1 + g \cdot v_1 = i_2.$$

Imajući u vidu da je po Omovom zakonu za otpornik otpornosti R_1 :

$$v_1 = i_1 \cdot R_1,$$

jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor X se može napisati u obliku:

$$i_2 = i_1 + g \cdot i_1 \cdot R_1 \Rightarrow i_1 = \frac{i_2}{1 + gR_1},$$

tako da se, uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 , dobija da je:

$$v_U - \frac{i_2 R_1}{1 + gR_1} - i_2 R_2 = 0 \Rightarrow v_U = \left(\frac{R_1}{1 + gR_1} + R_2 \right) i_2.$$

Napon v_I se može izraziti pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti R_2 :

$$v_I = i_2 R_2,$$

odakle je:

$$i_2 = \frac{v_I}{R_2}.$$

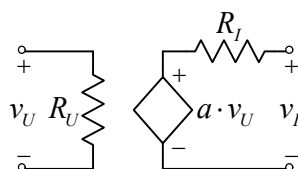
Uvrštavanjem dobijenog izraza za struju i_2 u prethodno izvedeni izraz za napon v_U dobija se da je:

$$v_U = \left(\frac{R_1}{1 + gR_1} + R_2 \right) \cdot \frac{v_I}{R_2}.$$

Konačno, traženo naponsko pojačanje je:

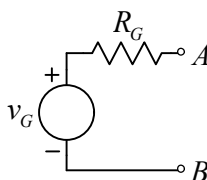
$$a = \frac{v_I}{v_U} = \frac{R_2}{\frac{R_1}{1 + gR_1} + R_2} = 0.999 \approx 1.$$

d) Kolo iz postavke zadatka predstavlja pojačavač čija je ekvivalentna ulazna otpornost R_U , ekvivalentna izlazna otpornost R_I , i čije je pojačanje a , pri čemu su sva tri pomenuta parametra pojačavača izračunata u prethodnim tačkama zadatka. Ekvivalentni model pojačavača čija je ekvivalentna ulazna otpornost R_U , ekvivalentna izlazna otpornost R_I , i čije je pojačanje a , je predstavljen na slici 1.66d:



Slika 1.66d

Realni naponski generator koji neopterećen daje napon v_G i koji ima unutrašnju otpornost R_G se može predstaviti ekvivalentnom šemom prikazanom na slici 1.66e:



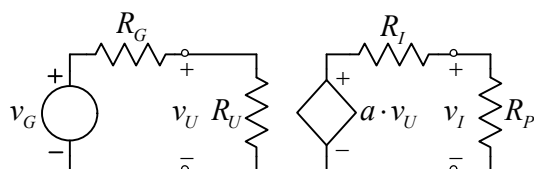
Slika 1.66e

Naime, kada je realni naponski generator sa slike 1.66e neopterećen, tj. kada ništa nije povezano između tačaka A i B , kroz otpornik otpornosti R_G neće proticati struja, pa će po Omovom zakonu napon na tom otporniku biti jednak nuli. To znači da će na priključcima realnog naponskog generatora napon biti $u_{AB} = v_G$. Ekvivalentna otpornost između tačaka A i B (koja se određuje tako što se idealni naponski generator v_G anulira, tj. zameni kratkim spojem) je jednaka R_G , što predstavlja unutrašnju otpornost realnog naponskog generatora.

Kada se, prema uslovu zadatka, između ulaznih priključaka kola iz postavke zadatka poveže realni naponski generator koji neopterećen daje napon $v_G = 10\text{V}$ i koji ima unutrašnju otpornost $R_G = 200\Omega$, a između izlaznih priključaka kola poveže potrošač otpornosti $R_p = 0.5\text{k}\Omega$, i kada

1. Električna kola stalnih struja

se kolo iz postavke zadatka ekvivalentira modelom predstavljenim na slici 1.66d, dobija se kolo prikazano na slici 1.66f:



Slika 1.66f

Napon v_U , označen na slici 1.66f, se može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

$$v_U = \frac{R_U}{R_U + R_G} \cdot v_G.$$

Napon v_I , tj. napon na potrošaču otpornosti R_P , označen na slici 1.66f, se takođe može odrediti primenom formule za razdelnik napona:

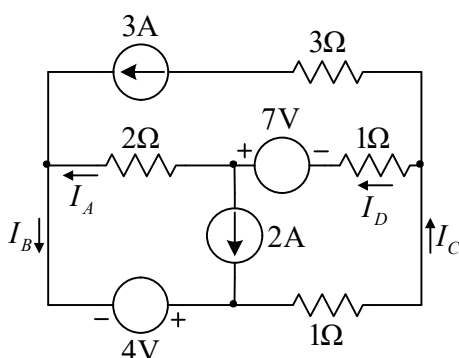
$$v_I = \frac{R_P}{R_P + R_I} \cdot a \cdot v_U = \frac{R_P}{R_P + R_I} \cdot a \cdot \frac{R_U}{R_U + R_G} \cdot v_G.$$

Zamenom brojnih vrednosti izračunatih u prethodnim tačkama zadatka, dobija se da je:

$$v_I \approx v_G = 10\text{V}.$$

1.67. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.67. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

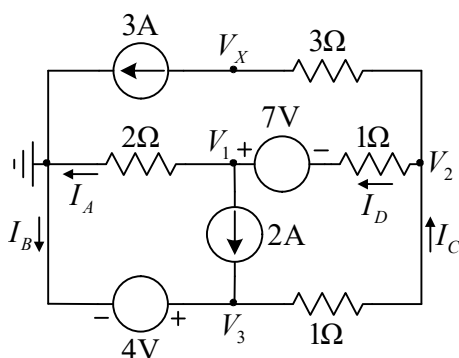
b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.



Slika 1.67

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 4V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 4V.



Slika 1.67a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.67a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.67a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ V_3 &= 4V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= \frac{7V}{1\Omega} - 2A \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -\frac{7V}{1\Omega} - 3A \\ V_3 &= 4V \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 &= 5A \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \frac{2}{1\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -10A \\ V_3 &= 4V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_2 &= \frac{3}{2}V_1 - 5V \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \frac{2}{1\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -10A \\ V_3 &= 4V \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 i izračunate vrednosti za V_3 u drugu jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 + \frac{2}{1\Omega} \cdot \left(\frac{3}{2}V_1 - 5V \right) - \frac{1}{1\Omega} \cdot 4V = -10A \Rightarrow 2V_1 = 4V \Rightarrow V_1 = 2V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_1 u izvedeni izraz za potencijal V_2 , dobija se:

1. Električna kola stalnih struja

$$V_2 = -2V.$$

Struja I_A se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{V_1 - 0}{2\Omega} = 1A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω koji je povezan između čvorova čiji su potencijali V_2 i V_3 :

$$I_C = \frac{V_3 - V_2}{1\Omega} = 6A.$$

Struja I_D se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom napona $7V$:

$$I_D = \frac{V_2 - (V_1 - 7V)}{1\Omega} = 3A.$$

Struja I_B se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za referentni čvor:

$$I_B = I_A + 3A = 4A.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $4V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{4V} = 4V \cdot I_B = 16W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $7V$ je:

$$P_{7V} = 7V \cdot I_D = 21W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3A} = (0 - V_X) \cdot 3A,$$

gde je V_X potencijal desnog priključka idealnog strujnog generatora struje $3A$ koji je označen na slici 1.67a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_2 - 3\Omega \cdot 3A = -11V,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{3A} = (0 - V_X) \cdot 3A = 33W.$$

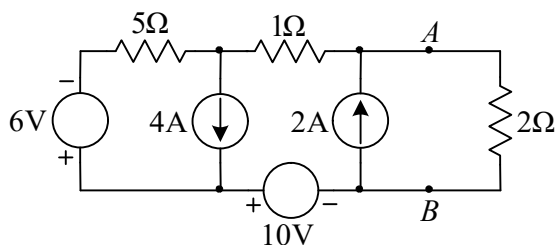
Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$ je:

$$P_{2A} = (V_3 - V_1) \cdot 2A = 4W.$$

1. Električna kola stalnih struja

1.68. a) Za kolo sa slike 1.68 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω .

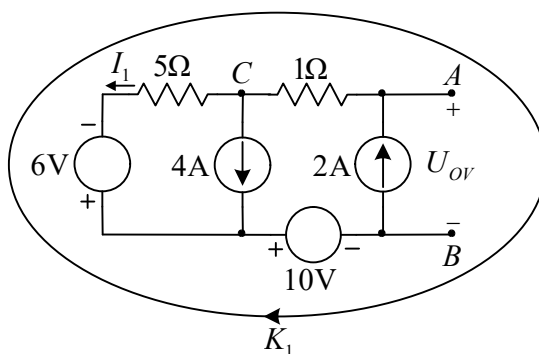


Slika 1.68

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.68a:

$$U_T = U_{ov}.$$



Slika 1.68a

Za kolo sa slike 1.68a se može napisati set jednačina po Kirhofovim zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na otpornicima otpornosti 5Ω i 1Ω izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$10V - 6V + I_1 \cdot 5\Omega + 2A \cdot 1\Omega - U_{ov} = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C glasi:

$$I_1 = 2A - 4A = -2A.$$

Uvrštavanjem izračunate vrednosti za struju I_1 u već napisanu jednačinu po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 , sledi da je:

$$10V - 6V + (-2A) \cdot 5\Omega + 2A \cdot 1\Omega - U_{ov} = 0.$$

1. Električna kola stalnih struja

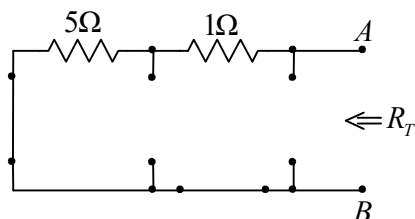
Na osnovu prethodne jednačine se može izračunati napon U_{OV} :

$$U_{OV} = -4V ,$$

tako da je konačno:

$$U_T = U_{OV} = -4V .$$

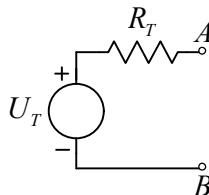
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.68b:



Slika 1.68b

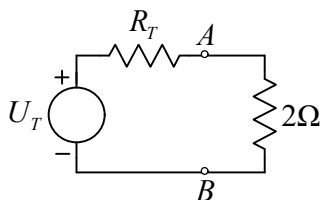
$$R_T = 1\Omega + 5\Omega = 6\Omega .$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.68a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.68c:



Slika 1.68c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.68d:



Slika 1.68d

Napon U_{AB} u kolu sa slike 1.68d se može odrediti pomoću formule za razdelnik napona:

$$U_{AB} = \frac{2\Omega}{2\Omega + R_T} \cdot U_T = \frac{2\Omega}{2\Omega + 6\Omega} \cdot (-4V) = -1V .$$

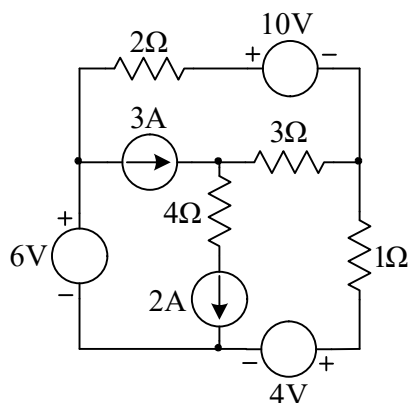
1. Električna kola stalnih struja

Konačno, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2\Omega} = \frac{U_{AB}^2}{2\Omega} = 0.5 \text{ W}.$$

1.69. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.69.

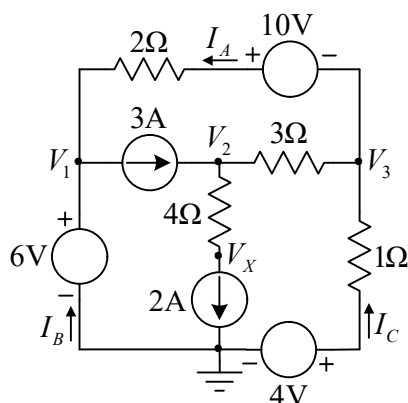
b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.



Slika 1.69

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 6V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 6V.



Slika 1.69a

1. Električna kola stalnih struja

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.69a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.69a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 6V \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 6V \\ -0 \cdot V_1 + \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 &= 3A - 2A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_3 &= -\frac{10V}{2\Omega} + \frac{4V}{1\Omega} \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 6V \\ \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_3 &= 1A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \frac{11}{6\Omega} \cdot V_3 &= -1A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 6V \\ V_2 &= V_3 + 3V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_2 + \frac{11}{6\Omega} \cdot V_3 &= -1A \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 i izračunate vrednosti za V_1 u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{2\Omega} \cdot 6V - \frac{1}{3\Omega} \cdot (V_3 + 3V) + \frac{11}{6\Omega} \cdot V_3 = -1A \Rightarrow \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 = 3A \Rightarrow V_3 = 2V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_3 u izvedeni izraz za potencijal V_2 , dobija se:

$$V_2 = 5V.$$

b) Struja I_A (označena na slici 1.69a) se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{(V_3 + 10V) - V_1}{2\Omega} = 3A.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $10V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{10V} = 10V \cdot I_A = 30W.$$

Struja I_B (označena na slici 1.69a) se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_1 :

$$I_B = 3A - I_A = 0.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $6V$ je:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{6V} = 6V \cdot I_B = 0.$$

Struja I_C (označena na slici 1.69a) se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_C = \frac{(0 + 4V) - V_3}{1\Omega} = 2A.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $4V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{4V} = 4V \cdot I_C = 8W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ je:

$$P_{3A} = (V_2 - V_1) \cdot 3A = -3W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = (0 - V_X) \cdot 2A,$$

gde je V_X potencijal gornjeg priključka idealnog strujnog generatora struje $2A$ koji je označen na slici 1.69a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_2 - 4\Omega \cdot 2A = -3V,$$

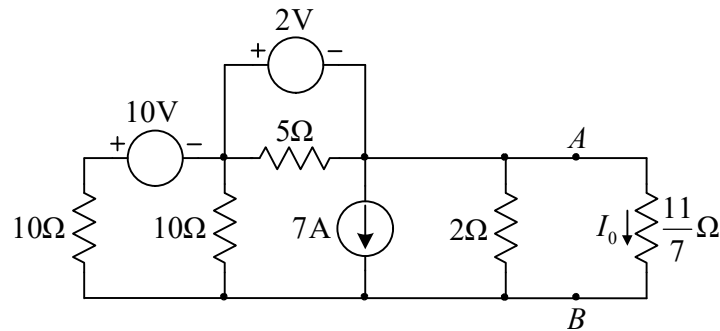
tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (0 - V_X) \cdot 2A = 6W.$$

1.70. a) Za kolo sa slike 1.70 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti struju I_0 i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti $\frac{11}{7}\Omega$.

1. Električna kola stalnih struja



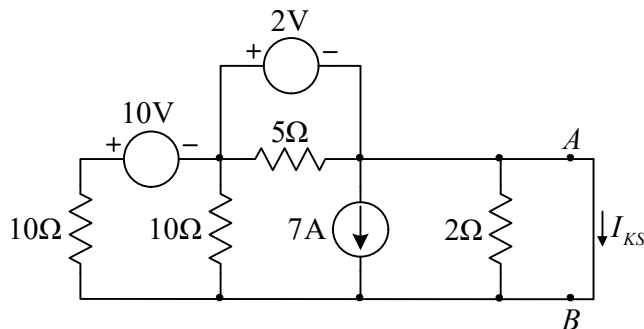
Slika 1.70

Rešenje:

a) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$I_N = I_{KS}.$$

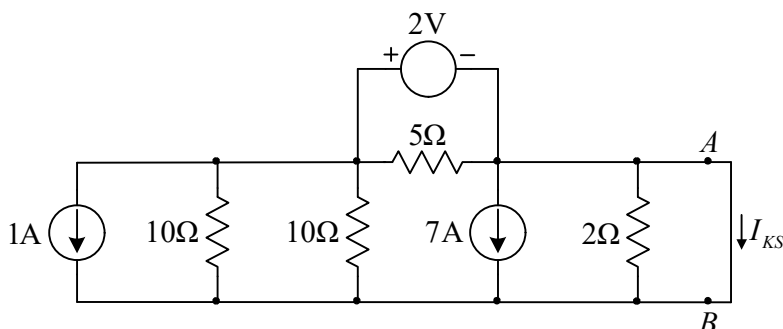
Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.70a.



Slika 1.70a

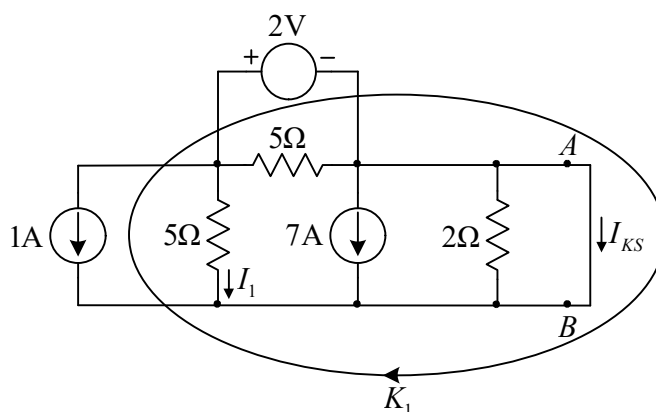
U kolu sa slike 1.70a se redna veza idealnog naponskog generatora napona 10V i otpornika otpornosti 10Ω , primenom metoda transformacije izvora, može transformisati u paralelnu vezu idealnog strujnog generatora struje 1A i otpornika otpornosti 10Ω . Na taj način se dobija kolo prikazano na slici 1.70b, koje je potpuno ekvivalentno kolu sa slike 1.70a.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.70b

U kolu sa slike 1.70b se paralelna veza dva otpornika otpornosti 10Ω može ekvivalentirati jednim otpornikom otpornosti 5Ω . Na taj način se dobija kolo prikazano na slici 1.70c, koje je potpuno ekvivalentno kolu sa slike 1.70b.



Slika 1.70c

Za kolo sa slike 1.70c se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj je napon na vertikalno postavljenom otporniku otpornosti 5Ω izražen preko Omovog zakona, glasi:

$$I_1 \cdot 5\Omega - 2V = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$I_1 = \frac{2}{5} \text{ A}.$$

S obzirom da su tačke A i B kratko spojene, napon na otporniku otpornosti 2Ω će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz taj otpornik neće proticati struja. Imajući to u vidu, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B važi:

$$1\text{A} + I_1 + 7\text{A} + I_{KS} = 0,$$

odakle se dobija da je:

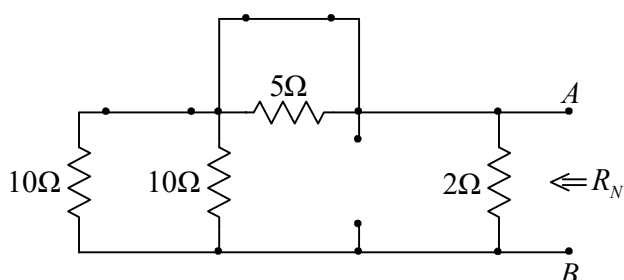
1. Električna kola stalnih struja

$$I_{KS} = -1\text{A} - I_1 - 7\text{A} = -\frac{42}{5}\text{A},$$

tako da je konačno:

$$I_N = I_{KS} = -\frac{42}{5}\text{A}.$$

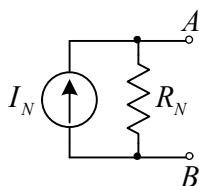
Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.70d (imajući pritom u vidu da se paralelna veza otpornika otpornosti 5Ω i kratkog spoja može ekvivalentirati kratkim spojem, jer je ekvivalentna otpornost paralelne veze bilo kog otpornika i otpornika nulte otpornosti, jednaka nuli):



Slika 1.70d

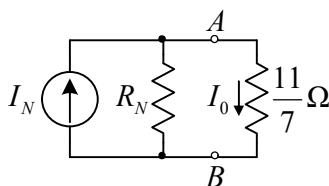
$$R_N = 10\Omega \parallel 10\Omega \parallel 2\Omega = \frac{10}{7}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.70a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.70e:



Slika 1.70e

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.70f:



Slika 1.70f

1. Električna kola stalnih struja

Struja I_0 se može odrediti pomoću formule za strujni razdelnik:

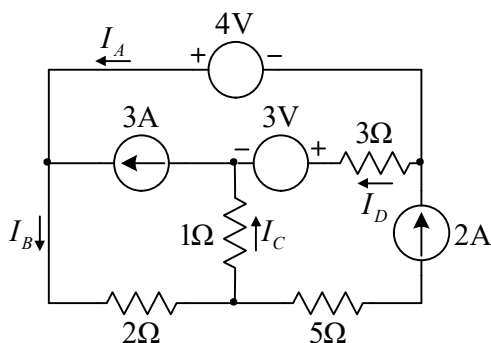
$$I_0 = \frac{R_N}{R_N + \frac{11}{7}\Omega} \cdot I_N = \frac{\frac{10}{7}\Omega}{\frac{10}{7}\Omega + \frac{11}{7}\Omega} \cdot \left(-\frac{42}{5}\text{A}\right) = -4\text{A}.$$

Konačno, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti $\frac{11}{7}\Omega$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{\frac{11}{7}\Omega} = I_0^2 \cdot \frac{11}{7}\Omega = \frac{176}{7}\text{W}.$$

1.71. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.71. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

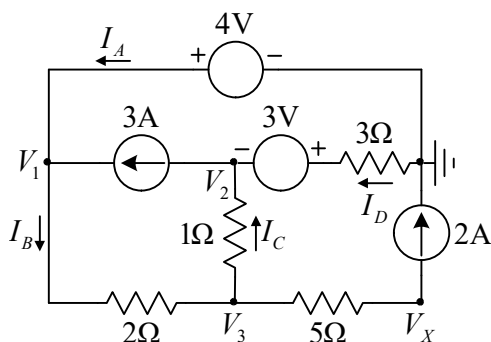


Slika 1.71

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 4V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 4V.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.71a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.71a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.71a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 4V \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 4V \\ -0 \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -\frac{3V}{3\Omega} - 3A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_3 &= -2A \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= 4V \\ \frac{4}{3\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -4A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 &= -2A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_1 &= 4V \\ V_3 &= \frac{4}{3}V_2 + 4V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_3 &= -2A \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_3 i izračunate vrednosti za V_1 u treću jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{2\Omega} \cdot 4V - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 + \frac{3}{2\Omega} \cdot \left(\frac{4}{3}V_2 + 4V \right) = -2A \Rightarrow V_2 = -6V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_3 , dobija se:

$$V_3 = -4V.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_B = \frac{V_1 - V_3}{2\Omega} = 4A.$$

1. Električna kola stalnih struja

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_C = \frac{V_3 - V_2}{1\Omega} = 2A .$$

Struja I_D se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 3Ω :

$$I_D = \frac{0 - (V_2 + 3V)}{3\Omega} = 1A .$$

Struja I_A se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_1 :

$$I_A = I_B - 3A = 1A .$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $4V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{4V} = 4V \cdot I_A = 4W .$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $3V$ je:

$$P_{3V} = 3V \cdot (-I_D) = -3W .$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = (0 - V_X) \cdot 2A ,$$

gde je V_X potencijal donjeg priključka idealnog strujnog generatora struje $2A$ koji je označen na slici 1.71a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_3 - 5\Omega \cdot 2A = -14V ,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (-V_X) \cdot 2A = 28W .$$

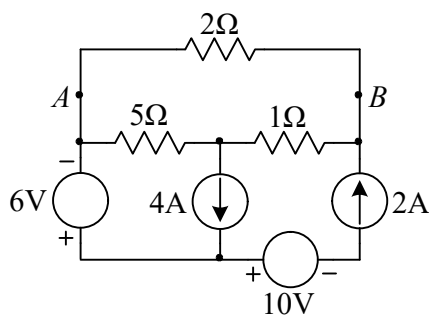
Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ je:

$$P_{3A} = (V_1 - V_2) \cdot 3A = 30W .$$

1.72. a) Za kolo sa slike 1.72 odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola ispod tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za kolo sa slike 1.72 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola ispod tačaka A i B .

c) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω .

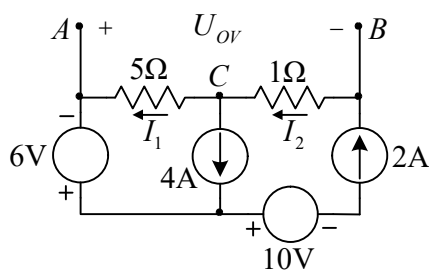


Slika 1.72

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola ispod tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola ispod tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.72a:

$$U_T = U_{OV}.$$



Slika 1.72a

Napon U_{OV} se, na osnovu kola prikazanog na slici 1.72a, može odrediti na sledeći način:

$$U_{OV} = -I_2 \cdot 1\Omega - I_1 \cdot 5\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_2 = 2A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$I_1 = I_2 - 4A = -2A,$$

tako da se dobija da je:

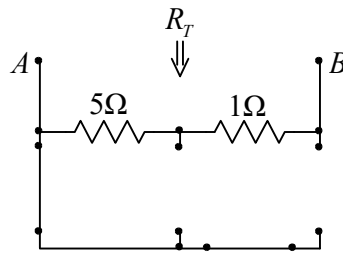
$$U_{OV} = 8V.$$

Dakle, konačno je:

$$U_T = U_{OV} = 8V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.72b:

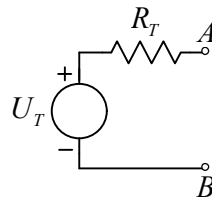
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.72b

$$R_T = 5\Omega + 1\Omega = 6\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.72a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.72c:



Slika 1.72c

b) Ekvivalentni Nortonov generator za deo kola iz postavke zadatka ispod tačaka A i B se može dobiti transformacijom Tevenenovog generatora određenog pod tačkom **a**), korišćenjem metoda transformacije izvora.

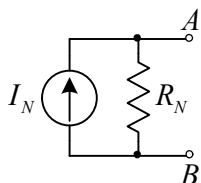
Struja Nortonovog generatora I_N , primenom metoda transformacije izvora, se određuje na sledeći način:

$$I_N = \frac{U_T}{R_T} = \frac{4}{3} \text{ A}.$$

Otpornost Nortonovog generatora R_N , primenom metoda transformacije izvora, se određuje na sledeći način:

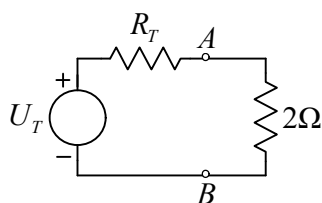
$$R_N = R_T = 6\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona Tevenenovog generatora U_T , može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.72d:



Slika 1.72d

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.72e:



Slika 1.72e

Napon U_{AB} u kolu sa slike 1.72e se može odrediti pomoću formule za razdelnik napona:

$$U_{AB} = \frac{2\Omega}{2\Omega + R_T} \cdot U_T = \frac{2\Omega}{2\Omega + 6\Omega} \cdot 8V = 2V.$$

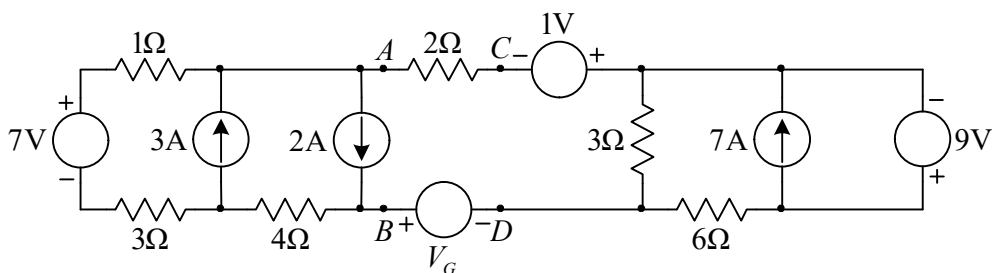
Konačno, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2\Omega} = \frac{U_{AB}^2}{2\Omega} = 2W.$$

1.73. Za kolo sa slike 1.73 odrediti:

- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B ;
- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola desno od tačaka C i D ;
- napon idealnog naponskog generatora V_G , tako da snaga koju predaje iznosi $5W$, ako je poznato da se u tom slučaju na otporniku otpornosti 2Ω disipira snaga $2W$;
- pod uslovom iz tačke c), otpornost potrošača R_p koji bi se povezao između tačaka A i D , tako da se na njemu disipira maksimalna moguća snaga, kao i koliko iznosi ta snaga.

1. Električna kola stalnih struja

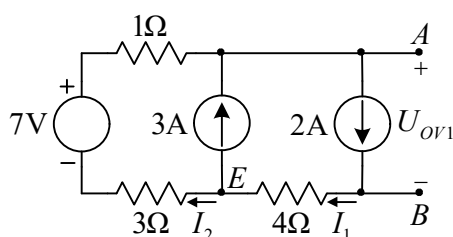


Slika 1.73

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.73a:

$$U_{T1} = U_{OV1}.$$



Slika 1.73a

Napon U_{OV1} (označen na slici 1.73a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T1} = U_{OV1} = -I_1 \cdot 4\Omega - I_2 \cdot 3\Omega + 7V - I_2 \cdot 1\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_1 = 2A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor E :

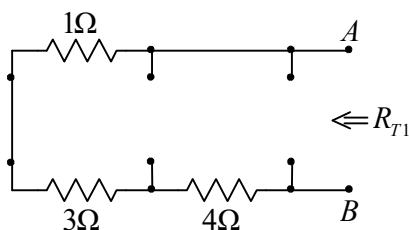
$$I_2 = I_1 - 3A = -1A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T1} = U_{OV1} = 3V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.73b:

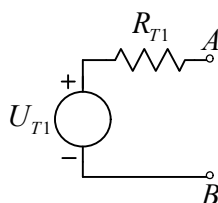
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.73b

$$R_{T1} = 1\Omega + 3\Omega + 4\Omega = 8\Omega.$$

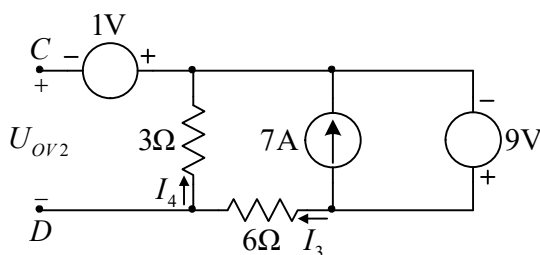
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV1} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.73a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.73c:



Slika 1.73c

b) Napon Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačaka C i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka C i D , nakon što se deo kola desno od tačaka C i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.73d:

$$U_{T2} = U_{OV2}.$$



Slika 1.73d

Napon U_{OV2} (označen na slici 1.73d) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T2} = U_{OV2} = -I_4 \cdot 3\Omega - 1V.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku D je:

$$I_4 = I_3,$$

1. Električna kola stalnih struja

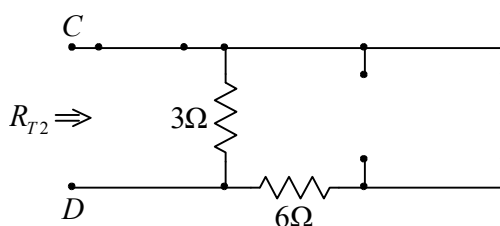
dok je na osnovu Omovog zakona za rednu vezu otpornika otpornosti 6Ω i 3Ω (imajući u vidu da kroz ta dva otpornika protiče ista struja):

$$I_4 = \frac{9V}{6\Omega + 3\Omega} = 1A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T2} = U_{OV2} = -4V.$$

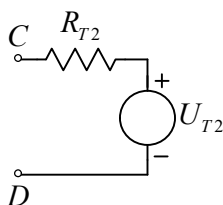
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.73e:



Slika 1.73e

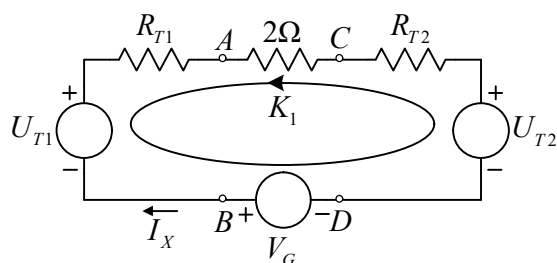
$$R_{T2} = 3\Omega \parallel 6\Omega = 2\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV2} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.73d), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.73f:



Slika 1.73f

c) Korišćenjem rezultata dobijenih u tačkama a) i b) ovog zadatka, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.73g:



Slika 1.73g

1. Električna kola stalnih struja

Za kolo sa slike 1.73g se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.73g) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$-U_{T1} - V_G + U_{T2} + I_X \cdot R_{T2} + I_X \cdot 2\Omega + I_X \cdot R_{T1} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$V_G = -U_{T1} + U_{T2} + I_X \cdot R_{T2} + I_X \cdot 2\Omega + I_X \cdot R_{T1}.$$

Po uslovu zadatka, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω iznosi $2W$, tako da važi:

$$P_{2\Omega} = I_X^2 \cdot 2\Omega = 2W.$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine po I_X se dobija da je:

$$I'_X = 1A \text{ ili } I''_X = -1A.$$

Zamenom izračunatih vrednosti struje I_X u izvedeni izraz za napon V_G , dobija se:

$$V'_G = 5V \text{ (za } I_X = I'_X) \text{ ili } V''_G = -19V \text{ (za } I_X = I''_X).$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator V_G se može izračunati na sledeći način:

$$P_{V_G} = V_G \cdot I_X.$$

Zamenom izračunatih vrednosti struje I'_X i napona V'_G u izraz za snagu koju predaje idealni naponski generator V_G , dobija se:

$$P'_{V_G} = V'_G \cdot I'_X = 5V \cdot 1A = 5W,$$

što odgovara uslovu zadatka (da snaga koju predaje idealni naponski generator V_G iznosi $5W$).

Zamenom izračunatih vrednosti struje I''_X i napona V''_G u izraz za snagu koju predaje idealni naponski generator V_G , dobija se:

$$P''_{V_G} = V''_G \cdot I''_X = -19V \cdot (-1A) = 19W,$$

što ne odgovara uslovu zadatka (da je snaga koju predaje idealni naponski generator V_G jednaka $5W$), tako da se rešenja I''_X i V''_G odbacuju.

Dakle, konačno je:

$$V_G = V'_G = 5V.$$

d) Na osnovu kola sa slike 1.73g, napon U_{AD} se može odrediti na sledeći način:

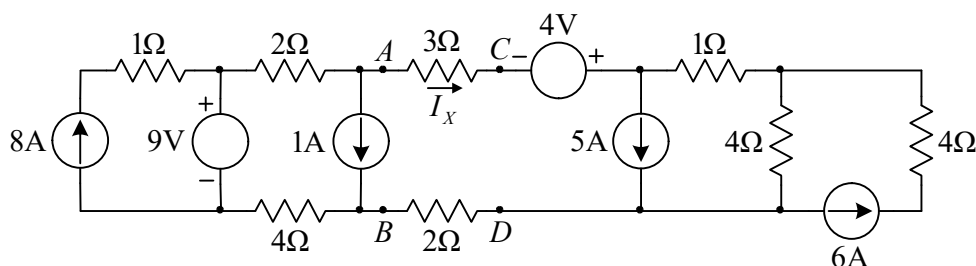
1. Električna kola stalnih struja

$$U_{AD} = V_G + U_{T1} - I_X \cdot R_{T1} = 5V + 3V - 1A \cdot 8\Omega = 0.$$

Iz dobijenog rezultata se može zaključiti da bi snaga, koja bi se disipirala na potrošaču R_p koji bi se povezao između tačaka A i D , bila jednaka nuli bez obzira na vrednost otpornosti R_p .

1.74. Za kolo sa slike 1.74 odrediti:

- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B ;
- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola desno od tačaka C i D ;
- struju I_X i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 3Ω .

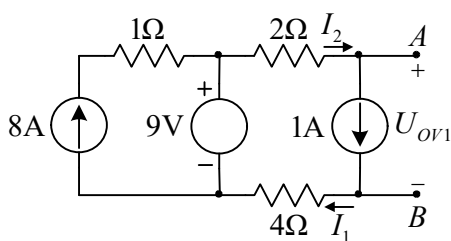


Slika 1.74

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.74a:

$$U_{T1} = U_{OV1}.$$



Slika 1.74a

Napon U_{OV1} (označen na slici 1.74a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T1} = U_{OV1} = -I_1 \cdot 4\Omega + 9V - I_2 \cdot 2\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_1 = 1A,$$

1. Električna kola stalnih struja

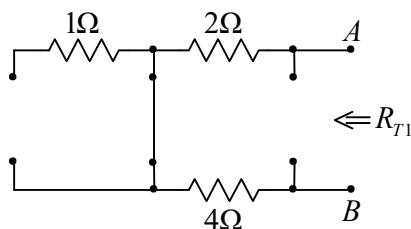
dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A :

$$I_2 = 1\text{A} ,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T1} = U_{OV1} = 3\text{V} .$$

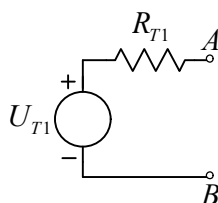
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.74b:



Slika 1.74b

$$R_{T1} = 2\Omega + 4\Omega = 6\Omega .$$

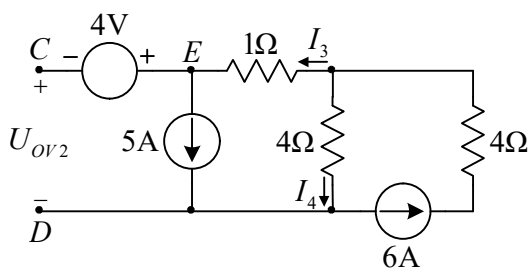
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV1} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.74a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.74c:



Slika 1.74c

b) Napon Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačaka C i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka C i D , nakon što se deo kola desno od tačaka C i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.74d:

$$U_{T2} = U_{OV2} .$$



Slika 1.74d

1. Električna kola stalnih struja

Napon U_{ov2} (označen na slici 1.74d) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T2} = U_{ov2} = I_4 \cdot 4\Omega - I_3 \cdot 1\Omega - 4V.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor D važi:

$$I_4 = 6A - 5A = 1A,$$

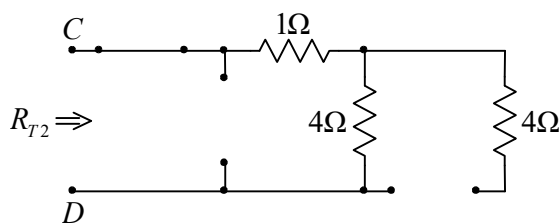
dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku E (imajući u vidu da kroz idealni naponski generator napona $4V$ ne protiče struja, jer na levom priključku tog generatora postoji prekid):

$$I_3 = 5A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T2} = U_{ov2} = -5V.$$

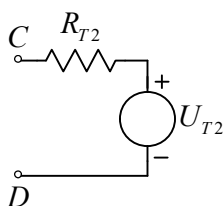
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.74e:



Slika 1.74e

$$R_{T2} = 1\Omega + 4\Omega = 5\Omega.$$

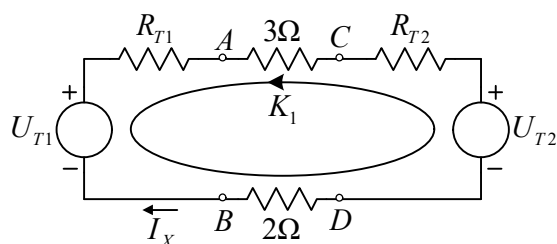
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov2} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.74d), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.74f:



Slika 1.74f

c) Korišćenjem rezultata dobijenih u tačkama a) i b) ovog zadatka, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.74g:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.74g

Za kolo sa slike 1.74g se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.74g) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$-U_{T1} + I_X \cdot 2\Omega + U_{T2} + I_X \cdot R_{T2} + I_X \cdot 3\Omega + I_X \cdot R_{T1} = 0,$$

odakle se dobija da je:

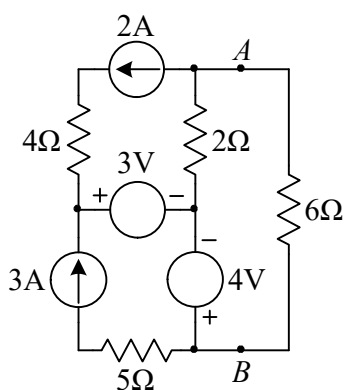
$$I_X = \frac{U_{T1} - U_{T2}}{R_{T1} + R_{T2} + 2\Omega + 3\Omega} = 0.5\text{A}.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 3Ω iznosi:

$$P_{3\Omega} = I_X^2 \cdot 3\Omega = 0.75\text{W}.$$

1.75. a) Za kolo sa slike 1.75 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 6Ω .



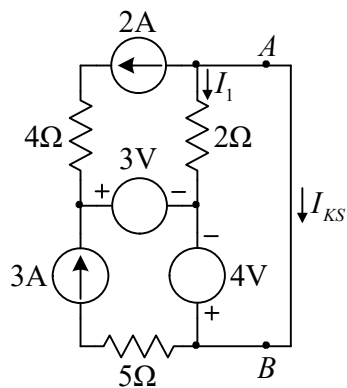
Slika 1.75

Rešenje:

a) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.75a.



Slika 1.75a

Struja I_1 (označena na slici 1.75a) se može odrediti pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_1 = \frac{4V}{2\Omega} = 2A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A :

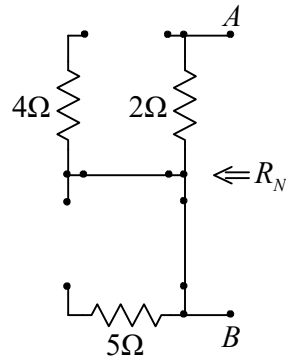
$$I_{KS} = -I_1 - 2A = -4A,$$

tako da je konačno:

$$I_N = I_{KS} = -4A.$$

Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.75b:

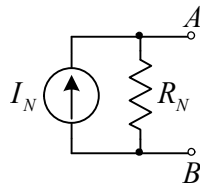
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.75b

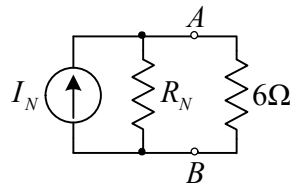
$$R_N = 2\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.75a), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.75c:



Slika 1.75c

b) Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.75d:



Slika 1.75d

Napon U_{AB} u kolu sa slike 1.75d se može odrediti pomoću Omovog zakona za paralelnu vezu otpornika otpornosti R_N i 6Ω :

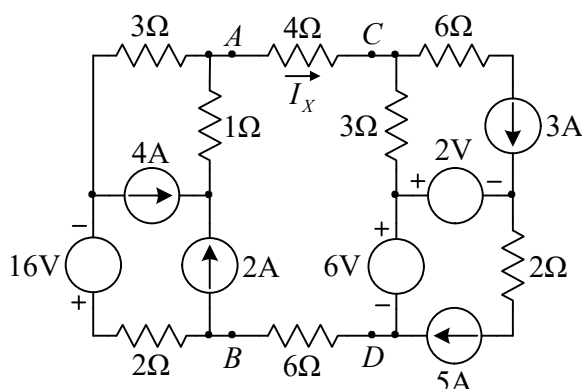
$$U_{AB} = (R_N \parallel 6\Omega) \cdot I_N = \frac{3}{2}\Omega \cdot (-4\text{A}) = -6\text{V}.$$

Konačno, snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 6Ω je:

$$P_{6\Omega} = \frac{U_{AB}^2}{6\Omega} = 6\text{W}.$$

1.76. Za kolo sa slike 1.76 odrediti:

- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B ;
- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola desno od tačaka C i D ;
- struju I_x i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 4Ω .

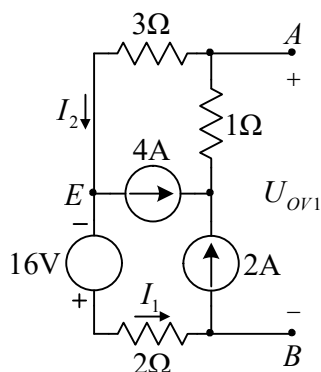


Slika 1.76

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.76a:

$$U_{T1} = U_{OV1}.$$



Slika 1.76a

Napon U_{OV1} (označen na slici 1.76a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T1} = U_{OV1} = I_1 \cdot 2\Omega - 16V + I_2 \cdot 3\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_1 = 2A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor E :

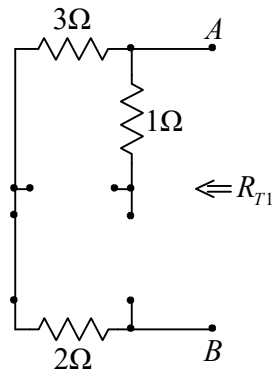
1. Električna kola stalnih struja

$$I_2 = I_1 + 4\text{A} = 6\text{A} ,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T1} = U_{OV1} = 6\text{V} .$$

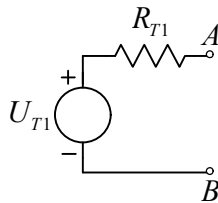
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.76b:



Slika 1.76b

$$R_{T1} = 3\Omega + 2\Omega = 5\Omega .$$

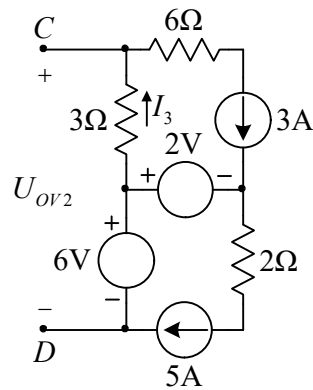
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV1} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.76a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.76c:



Slika 1.76c

b) Napon Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačaka C i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka C i D , nakon što se deo kola desno od tačaka C i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.76d:

$$U_{T2} = U_{OV2} .$$



Slika 1.76d

Napon U_{OV2} (označen na slici 1.76d) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T2} = U_{OV2} = 6V - I_3 \cdot 3\Omega.$$

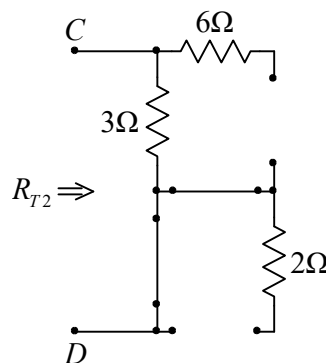
Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku C važi:

$$I_3 = 3A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T2} = U_{OV2} = -3V.$$

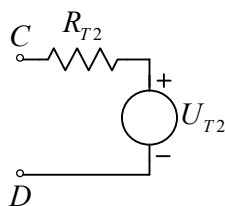
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.76e:



Slika 1.76e

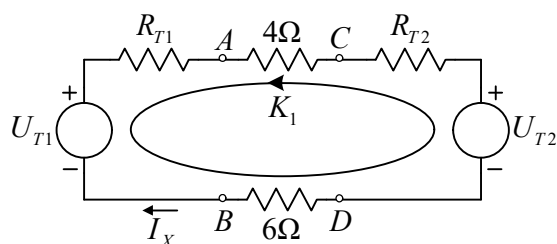
$$R_{T2} = 3\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV2} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.76d), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.76f:



Slika 1.76f

c) Korišćenjem rezultata dobijenih u tačkama a) i b) ovog zadatka, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.76g:



Slika 1.76g

Za kolo sa slike 1.76g se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.76g) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$-U_{T1} + I_X \cdot 6\Omega + U_{T2} + I_X \cdot R_{T2} + I_X \cdot 4\Omega + I_X \cdot R_{T1} = 0,$$

odakle se dobija da je:

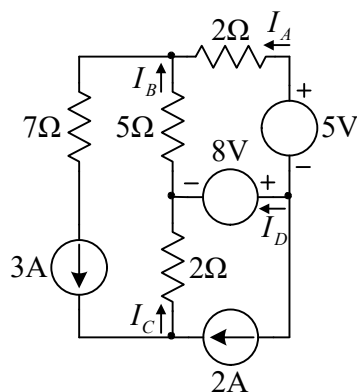
$$I_X = \frac{U_{T1} - U_{T2}}{R_{T1} + R_{T2} + 4\Omega + 6\Omega} = 0.5A.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 4Ω iznosi:

$$P_{4\Omega} = I_X^2 \cdot 4\Omega = 1W.$$

1.77. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.77. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

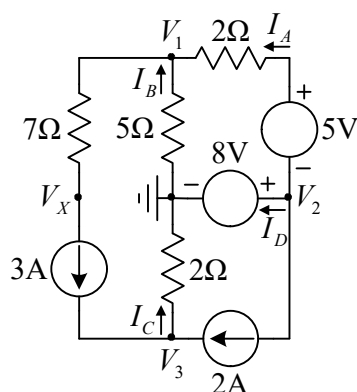
b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje. Odrediti i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 7Ω .



Slika 1.77

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 8V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 8V.



Slika 1.77a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.77a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.77a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ V_2 &= 8V \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{5\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 &= \frac{5V}{2\Omega} - 3A \\ V_2 &= 8V \\ -0 \cdot V_1 - 0 \cdot V_2 + \frac{1}{2\Omega} \cdot V_3 &= 3A + 2A \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} \frac{7}{10\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 = -\frac{1}{2} \text{ A} \\ V_2 = 8 \text{ V} \\ \frac{1}{2\Omega} \cdot V_3 = 5 \text{ A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = \frac{5}{7} V_2 - \frac{5}{7} \text{ V} \\ V_2 = 8 \text{ V} \\ V_3 = 10 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 5 \text{ V} \\ V_2 = 8 \text{ V} \\ V_3 = 10 \text{ V} \end{array} \right\}.$$

Struja I_A se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom napona 5V :

$$I_A = \frac{(V_2 + 5\text{V}) - V_1}{2\Omega} = 4\text{A}.$$

Struja I_B se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 5Ω :

$$I_B = \frac{0 - V_1}{5\Omega} = -1\text{A}.$$

Struja I_C se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω koji je povezan između referentnog čvora i čvora čiji je potencijal V_3 :

$$I_C = \frac{V_3 - 0}{2\Omega} = 5\text{A}.$$

Struja I_D se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_2 :

$$I_D = -I_A - 2\text{A} = -6\text{A}.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 5V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{5\text{V}} = 5\text{V} \cdot I_A = 20\text{W}.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 8V je:

$$P_{8\text{V}} = 8\text{V} \cdot (-I_D) = 48\text{W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 3A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3\text{A}} = (V_3 - V_X) \cdot 3\text{A},$$

gde je V_X potencijal gornjeg priključka idealnog strujnog generatora struje 3A koji je označen na slici 1.77a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_1 - 7\Omega \cdot 3\text{A} = -16\text{V},$$

tako da se dobija da je:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{3A} = (V_3 - V_X) \cdot 3A = 78W.$$

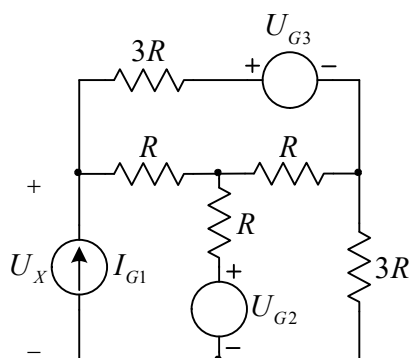
Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 2A je:

$$P_{2A} = (V_3 - V_2) \cdot 2A = 4W.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 7Ω se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

$$P_{7\Omega} = (3A)^2 \cdot 7\Omega = 63W.$$

1.78. Za kolo sa slike 1.78 je poznato: $I_{G1} = 5mA$, $U_{G2} = 5V$, $U_{G3} = 10V$ i $R = 1k\Omega$. Primenom metoda potencijala čvorova odrediti napon U_X .

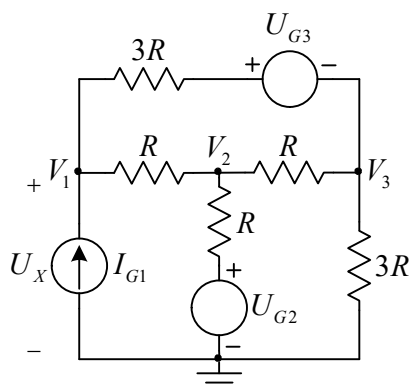


Slika 1.78

Rešenje:

Ukoliko se potencijali čvorova u zadatom kolu označe na način prikazan na slici 1.78a, po metodu potencijala čvorova se za to kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 &= I^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{R} \cdot V_2 - \frac{1}{3R} \cdot V_3 &= \frac{U_{G3}}{3R} + I_{G1} \\ -\frac{1}{R} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{R} \cdot V_3 &= \frac{U_{G2}}{R} \\ -\frac{1}{3R} \cdot V_1 - \frac{1}{R} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} \right) \cdot V_3 &= -\frac{U_{G3}}{3R} \end{aligned} \right\}.$$



Slika 1.78a

Zamenom brojnih vrednosti iz postavke zadatka, u napisani sistem jednačina, dobija se:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{3\text{k}\Omega} + \frac{1}{1\text{k}\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{1\text{k}\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{3\text{k}\Omega} \cdot V_3 &= \frac{10\text{V}}{3\text{k}\Omega} + 5\text{mA} \\ -\frac{1}{1\text{k}\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{1\text{k}\Omega} + \frac{1}{1\text{k}\Omega} + \frac{1}{1\text{k}\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\text{k}\Omega} \cdot V_3 &= \frac{5\text{V}}{1\text{k}\Omega} \\ -\frac{1}{3\text{k}\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{1\text{k}\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{3\text{k}\Omega} + \frac{1}{1\text{k}\Omega} + \frac{1}{3\text{k}\Omega} \right) \cdot V_3 &= -\frac{10\text{V}}{3\text{k}\Omega} \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} 4V_1 - 3V_2 - V_3 &= 25\text{V} \\ -V_1 + 3V_2 - V_3 &= 5\text{V} \\ -V_1 - 3V_2 + 5V_3 &= -10\text{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4V_1 - 3V_2 - V_3 &= 25\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ -V_1 - 3V_2 + 5V_3 &= -10\text{V} \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_1 u prvu i treću jednačinu, sledi:

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot (3V_2 - V_3 - 5\text{V}) - 3V_2 - V_3 &= 25\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ -(3V_2 - V_3 - 5\text{V}) - 3V_2 + 5V_3 &= -10\text{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 9V_2 - 5V_3 &= 45\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ -2V_2 + 2V_3 &= -5\text{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 9V_2 - 5V_3 &= 45\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ V_2 &= V_3 + \frac{5}{2}\text{V} \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 u prvu jednačinu, sledi:

$$\left. \begin{aligned} 9 \cdot \left(V_3 + \frac{5}{2}\text{V} \right) - 5V_3 &= 45\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ V_2 &= V_3 + \frac{5}{2}\text{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 4V_3 &= \frac{45}{2}\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ V_2 &= V_3 + \frac{5}{2}\text{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_3 &= \frac{45}{8}\text{V} \\ V_1 &= 3V_2 - V_3 - 5\text{V} \\ V_2 &= V_3 + \frac{5}{2}\text{V} \end{aligned} \right\}.$$

1. Električna kola stalnih struja

Zamenom izračunate vrednosti za V_3 u drugu i treću jednačinu, dobija se:

$$\left. \begin{aligned} V_3 &= \frac{45}{8} \text{ V} \\ V_1 &= 3V_2 - \frac{85}{8} \text{ V} \\ V_2 &= \frac{65}{8} \text{ V} \end{aligned} \right\}.$$

Konačno, zamenom izračunate vrednosti potencijala V_2 u izvedeni izraz za potencijal V_1 , dobija se:

$$V_1 = \frac{55}{4} \text{ V}.$$

Tražena vrednost napona U_X je:

$$U_X = V_1 - 0 = \frac{55}{4} \text{ V}.$$

1.79. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.79. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

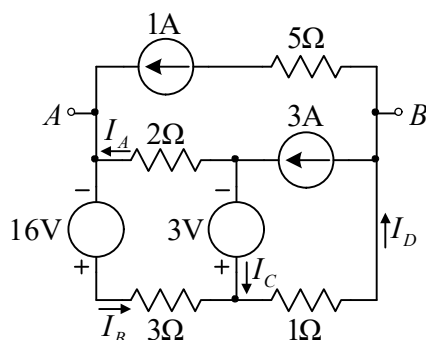
b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

c) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti ekvivalentni Tevenenov generator između tačaka A i B .

d) Ako se između tačaka A i B kola sa slike 1.79 poveže otpornik otpornosti R_p , kolika treba da bude otpornost R_p da bi se na njoj razvijala maksimalna moguća snaga?

e) Ako se između tačaka A i B kola sa slike 1.79 poveže kondenzator kapacitivnosti $C = 1 \text{ nF}$, odrediti količinu naelektrisanja na tom kondenzatoru.

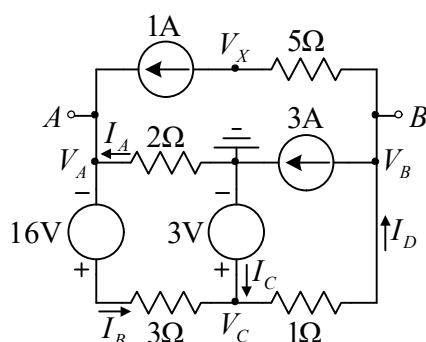
f) Za kolo sa slike 1.79 odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola ispod tačaka A i B .



Slika 1.79

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 3V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 3V.



Slika 1.79a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.79a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.79a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{AA}V_A + G_{AB}V_B + G_{AC}V_C &= I^{(A)} \\ G_{BA}V_A + G_{BB}V_B + G_{BC}V_C &= I^{(B)} \\ V_C &= 3V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{3\Omega} \right) \cdot V_A - 0 \cdot V_B - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_C &= -\frac{16V}{3\Omega} + 1A \\ -0 \cdot V_A + \frac{1}{1\Omega} \cdot V_B - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_C &= -1A - 3A \\ V_C &= 3V \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6\Omega} \cdot V_A - \frac{1}{3\Omega} \cdot V_C = -\frac{13}{3} \text{ A} \\ \frac{1}{1\Omega} \cdot V_B - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_C = -4 \text{ A} \\ V_C = 3 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = \frac{2}{5} V_C - \frac{26}{5} \text{ V} \\ V_B = V_C - 4 \text{ V} \\ V_C = 3 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_A = -4 \text{ V} \\ V_B = -1 \text{ V} \\ V_C = 3 \text{ V} \end{array} \right\}.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{0 - V_A}{2\Omega} = 2 \text{ A}.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 3Ω :

$$I_B = \frac{(V_A + 16 \text{ V}) - V_C}{3\Omega} = 3 \text{ A}.$$

Struja I_D se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_D = \frac{V_C - V_B}{1\Omega} = 4 \text{ A}.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_C :

$$I_C = I_D - I_B = 1 \text{ A}.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 16 V se može izračunati na sledeći način:

$$P_{16\text{V}} = 16 \text{ V} \cdot I_B = 48 \text{ W}.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona 3 V je:

$$P_{3\text{V}} = 3 \text{ V} \cdot I_C = 3 \text{ W}.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 1 A se može izračunati na sledeći način:

$$P_{1\text{A}} = (V_A - V_X) \cdot 1 \text{ A},$$

gde je V_X potencijal desnog priključka idealnog strujnog generatora struje 1 A koji je označen na slici 1.79a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_B - 5\Omega \cdot 1 \text{ A} = -6 \text{ V},$$

tako da se dobija da je:

$$P_{1\text{A}} = (V_A - V_X) \cdot 1 \text{ A} = 2 \text{ W}.$$

1. Električna kola stalnih struja

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 3A je:

$$P_{3A} = (0 - V_B) \cdot 3A = 3W.$$

c) Napon Tevenenovog generatora između tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B :

$$U_T = U_{AB}.$$

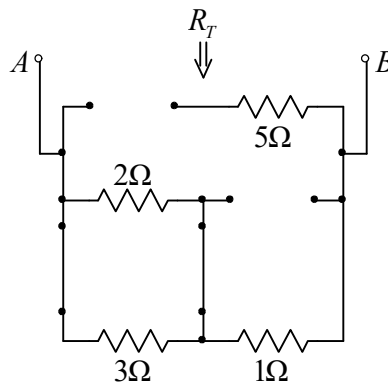
Napon U_{AB} se, na osnovu rezultata iz tačke a), može predstaviti na sledeći način:

$$U_{AB} = V_A - V_B = -3V,$$

tako da je:

$$U_T = U_{AB} = -3V.$$

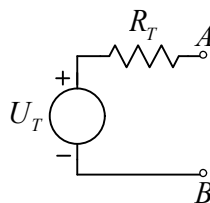
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.79b:



Slika 1.79b

$$R_T = (2\Omega \parallel 3\Omega) + 1\Omega = \frac{11}{5}\Omega.$$

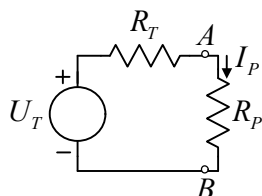
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{AB} , može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.79c:



Slika 1.79c

1. Električna kola stalnih struja

d) Ako se kolo iz postavke zadatka između tačaka A i B predstavi ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, a između tačaka A i B poveže otpornik otpornosti R_p , dobija se kolo prikazano na slici 1.79d.



Slika 1.79d

Snaga koja se razvija (disipira) na otporniku R_p se može izraziti na sledeći način:

$$P_{R_p} = I_p^2 \cdot R_p = \left(\frac{U_T}{R_T + R_p} \right)^2 \cdot R_p.$$

Otpornost R_p za koju je snaga P_{R_p} maksimalna se određuje iz uslova da je za tu vrednost R_p prvi izvod P_{R_p} po R_p jednak nuli:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = 0.$$

Dalje sledi:

$$\frac{dP_{R_p}}{dR_p} = \frac{d}{dR_p} \left[\frac{U_T^2 \cdot R_p}{(R_T + R_p)^2} \right] = U_T^2 \cdot \frac{(R_T + R_p)^2 - 2R_p(R_T + R_p)}{(R_T + R_p)^4} = U_T^2 \cdot \frac{R_T^2 - R_p^2}{(R_T + R_p)^4} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$R_p = R_T = \frac{11}{5} \Omega.$$

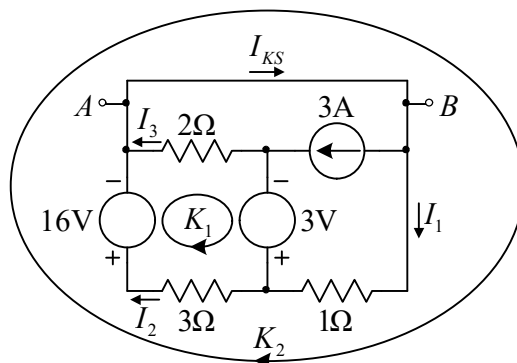
e) Ako se između tačaka A i B kola iz postavke zadatka poveže kondenzator kapacitivnosti $C = 1\text{nF}$, količina naelektrisanja na tom kondenzatoru će biti:

$$q = C \cdot U_{AB} = -3\text{nC}.$$

f) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola ispod tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se deo kola ispod tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$I_N = I_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 1.79e.



Slika 1.79e

Za kolo sa slike 1.79e se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona glasi:

$$3\text{V} - I_2 \cdot 3\Omega - 16\text{V} + I_3 \cdot 2\Omega = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_2 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona je:

$$-I_1 \cdot 1\Omega - I_2 \cdot 3\Omega - 16\text{V} = 0.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za tačku A glasi:

$$I_{KS} = I_2 + I_3.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za tačku B je:

$$I_{KS} = I_1 + 3\text{A}.$$

Ako se iz poslednje jednačine izrazi struja I_1 , a iz jednačine po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_2 izrazi struja I_2 , dobija se:

$$I_1 = I_{KS} - 3\text{A},$$

$$I_2 = -\frac{1}{3}I_1 - \frac{16}{3}\text{A} = -\frac{1}{3}(I_{KS} - 3\text{A}) - \frac{16}{3}\text{A} \Rightarrow I_2 = -\frac{1}{3}I_{KS} - \frac{13}{3}\text{A}.$$

Ako se, potom, izvedeni izraz za struju I_2 uvrsti u jednačinu napisanu po Kirhofovom zakonu za struje za tačku A , dobija se:

$$I_{KS} = -\frac{1}{3}I_{KS} - \frac{13}{3}\text{A} + I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{4}{3}I_{KS} + \frac{13}{3}\text{A}.$$

1. Električna kola stalnih struja

Uvrštavanjem izvedenih izraza za struje I_2 i I_3 u jednačinu napisanu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 , sledi:

$$3V - \left(-\frac{1}{3}I_{KS} - \frac{13}{3}\text{A}\right) \cdot 3\Omega - 16V + \left(\frac{4}{3}I_{KS} + \frac{13}{3}\text{A}\right) \cdot 2\Omega = 0 \Rightarrow \frac{11}{3}I_{KS} = -\frac{26}{3}\text{A},$$

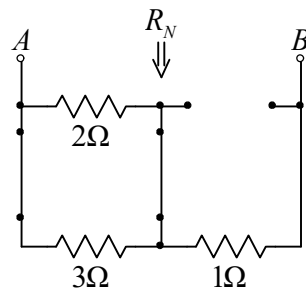
odakle se dobija:

$$I_{KS} = -\frac{26}{11}\text{A},$$

tako da je konačno:

$$I_N = I_{KS} = -\frac{26}{11}\text{A}.$$

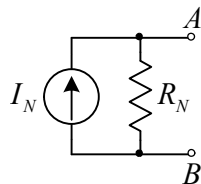
Otpornost Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.79f:



Slika 1.79f

$$R_N = (2\Omega \parallel 3\Omega) + 1\Omega = \frac{11}{5}\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.79e), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.79g:



Slika 1.79g

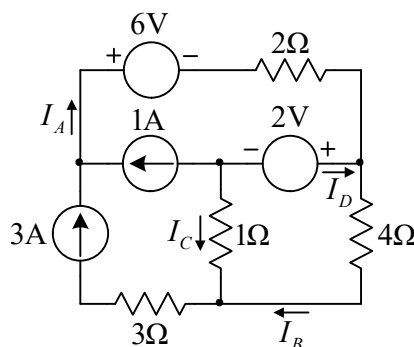
1. Električna kola stalnih struja

1.80. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.80. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

c) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola sa slike 1.80, između priključaka otpornika otpornosti 4Ω , koji sadrži sve elemente osim tog otpornika.

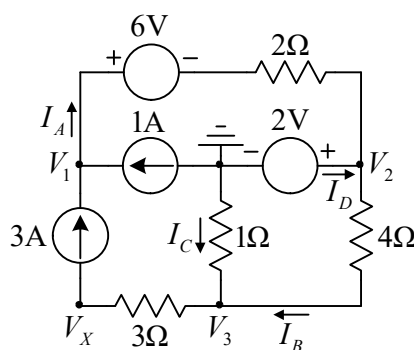
d) Ako se u kolu sa slike 1.80 paralelno sa otpornikom otpornosti 2Ω poveže kondenzator kapacitivnosti $C = 1\text{ nF}$, odrediti količinu naelektrisanja na tom kondenzatoru.



Slika 1.80

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona 2 V), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 2 V .



Slika 1.80a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.80a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.80a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

1. Električna kola stalnih struja

$$\left. \begin{array}{l} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 = I^{(1)} \\ V_2 = 2V \\ G_{31}V_1 + G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I^{(3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - 0 \cdot V_3 = \frac{6V}{2\Omega} + 1A + 3A \\ V_2 = 2V \\ -0 \cdot V_1 - \frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{4\Omega} \right) \cdot V_3 = -3A \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 = 7A \\ V_2 = 2V \\ -\frac{1}{4\Omega} \cdot V_2 + \frac{5}{4\Omega} \cdot V_3 = -3A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = V_2 + 14V \\ V_2 = 2V \\ V_3 = \frac{1}{5}V_2 - \frac{12}{5}V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} V_1 = 16V \\ V_2 = 2V \\ V_3 = -2V \end{array} \right\}.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_A = \frac{(V_1 - 6V) - V_2}{2\Omega} = 4A.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 4Ω :

$$I_B = \frac{V_2 - V_3}{4\Omega} = 1A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_C = \frac{0 - V_3}{1\Omega} = 2A.$$

Struja I_D se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_2 :

$$I_D = I_B - I_A = -3A.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $6V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{6V} = 6V \cdot (-I_A) = -24W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $2V$ je:

$$P_{2V} = 2V \cdot I_D = -6W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $1A$ je:

$$P_{1A} = (V_1 - 0) \cdot 1A = 16W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ se može izračunati na sledeći način:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{3A} = (V_1 - V_X) \cdot 3A,$$

gde je V_X potencijal donjeg priključka idealnog strujnog generatora struje $3A$ koji je označen na slici 1.80a, i koji se može odrediti na sledeći način:

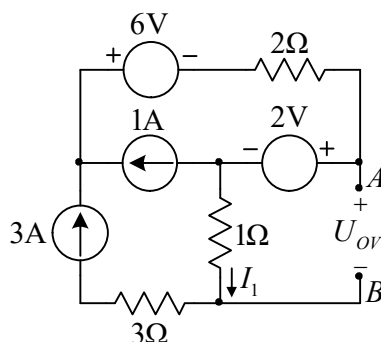
$$V_X = V_3 - 3\Omega \cdot 3A = -11V,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{3A} = (V_1 - V_X) \cdot 3A = 81W.$$

c) Napon Tevenenovog generatora za deo kola iz postavke zadatka, između priključaka otpornika otpornosti 4Ω , koji sadrži sve elemente osim tog otpornika, se određuje kao napon otvorene veze U_{ov} između tačaka A i B , nakon što se otpornik otpornosti 4Ω ukloni iz kola iz postavke zadatka, kao što je to prikazano na slici 1.80b:

$$U_T = U_{ov}.$$



Slika 1.80b

Napon U_{ov} se može odrediti na sledeći način:

$$U_T = U_{ov} = I_1 \cdot 1\Omega + 2V.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

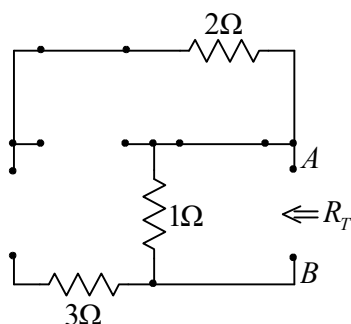
$$I_1 = 3A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_T = U_{ov} = 5V.$$

Otpornost traženog Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.80c:

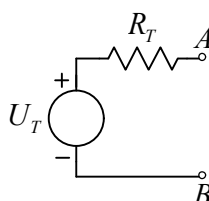
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.80c

$$R_T = 1\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.80b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.80d:

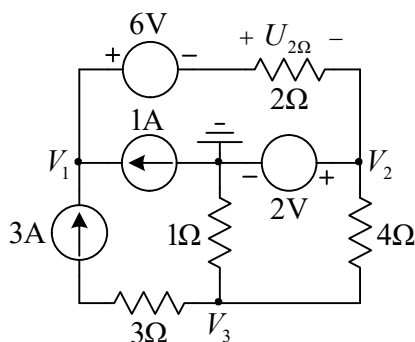


Slika 1.80d

d) Ako se u kolu iz postavke zadatka paralelno sa otpornikom otpornosti 2Ω poveže kondenzator kapacitivnosti $C = 1\text{nF}$, količina naelektrisanja na tom kondenzatoru će biti:

$$q = C \cdot U_{2\Omega},$$

gde je $U_{2\Omega}$ napon na otporniku otpornosti 2Ω , sa proizvoljno usvojenim referentnim smerom na način prikazan na slici 1.80e:



Slika 1.80e

Napon $U_{2\Omega}$ se, na osnovu rezultata iz tačke **a)**, može izračunati na sledeći način:

1. Električna kola stalnih struja

$$U_{2\Omega} = (V_1 - 6V) - V_2 = 8V,$$

tako da je tražena količina naelektrisanja na kondenzatoru kapacitivnosti $C = 1\text{nF}$:

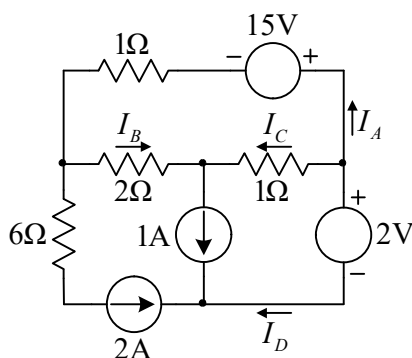
$$q = C \cdot U_{2\Omega} = 8\text{nC}.$$

1.81. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.81. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.

c) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator za deo kola sa slike 1.81, između priključaka otpornika otpornosti 2Ω , koji sadrži sve elemente osim tog otpornika.

d) Ako se u kolu sa slike 1.81 paralelno sa otpornikom otpornosti 6Ω poveže kondenzator kapacitivnosti $C = 1\text{nF}$, odrediti količinu naelektrisanja na tom kondenzatoru.

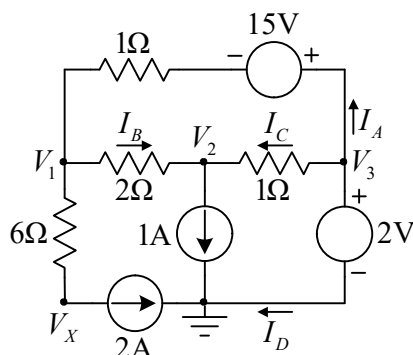


Slika 1.81

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona $2V$), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona $2V$.

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.81a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.81a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.81a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -\frac{15V}{1\Omega} - 2A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -17A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot 2V &= -17A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot 2V &= -1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 &= -15A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 &= 1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_2 &= 3V_1 + 30V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 &= 1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 u drugu jednačinu, sledi:

$$-\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot (3V_1 + 30V) = 1A \Rightarrow 4V_1 = -44V \Rightarrow V_1 = -11V.$$

1. Električna kola stalnih struja

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_1 u izvedeni izraz za potencijal V_2 , dobija se:

$$V_2 = -3V.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom napona $15V$:

$$I_A = \frac{(V_3 - 15V) - V_1}{1\Omega} = -2A.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω :

$$I_B = \frac{V_1 - V_2}{2\Omega} = -4A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω koji je povezan između čvora čiji je potencijal V_2 i čvora čiji je potencijal V_3 :

$$I_C = \frac{V_3 - V_2}{1\Omega} = 5A.$$

Struja I_D se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_3 :

$$I_D = -I_A - I_C = -3A.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $15V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{15V} = 15V \cdot (-I_A) = 30W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $2V$ je:

$$P_{2V} = 2V \cdot (-I_D) = 6W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $2A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{2A} = (0 - V_X) \cdot 2A,$$

gde je V_X potencijal levog priključka idealnog strujnog generatora struje $2A$ koji je označen na slici 1.81a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = V_1 - 6\Omega \cdot 2A = -23V,$$

tako da se dobija da je:

$$P_{2A} = (-V_X) \cdot 2A = 46W.$$

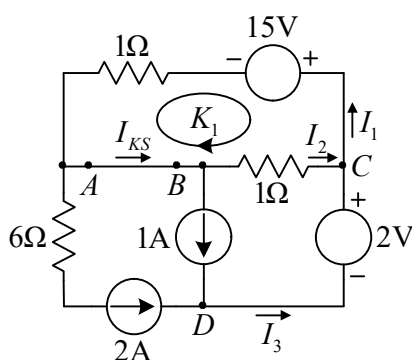
Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $1A$ je:

1. Električna kola stalnih struja

$$P_{1A} = (0 - V_2) \cdot 1A = 3W.$$

c) Struja Nortonovog generatora I_N za deo kola iz postavke zadatka, između priključaka otpornika otpornosti 2Ω , koji sadrži sve elemente osim tog otpornika, se određuje kao struja kratkog spoja I_{KS} između tačaka A i B , nakon što se otpornik otpornosti 2Ω ukloni iz kola iz postavke zadatka, i nakon što se te dve tačke kratko spoje, kao što je to prikazano na slici 1.81b:

$$I_N = I_{KS}.$$



Slika 1.81b

Za kolo sa slike 1.81b se može napisati set jednačina po Kirhofovima zakonima. Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona glasi:

$$15V + I_2 \cdot 1\Omega + I_1 \cdot 1\Omega = 0.$$

Na osnovu jednačine po Kirhofovom zakonu za struje za čvor D se dobija:

$$I_3 = 1A + 2A = 3A.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za tačku A je:

$$I_1 = I_{KS} + 2A.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za struje za čvor C glasi:

$$I_1 = I_2 + I_3,$$

odakle sledi:

$$I_2 = I_1 - I_3 = (I_{KS} + 2A) - 3A = I_{KS} - 1A.$$

Ako se poslednji izraz za struju I_2 i izraz za struju I_1 napisan po Kirhofovom zakonu za struje za tačku A , uvrste u jednačinu napisanu po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 , dobija se:

1. Električna kola stalnih struja

$$15V + (I_{KS} - 1A) \cdot 1\Omega + (I_{KS} + 2A) \cdot 1\Omega = 0 \Rightarrow 2I_{KS} = -16A,$$

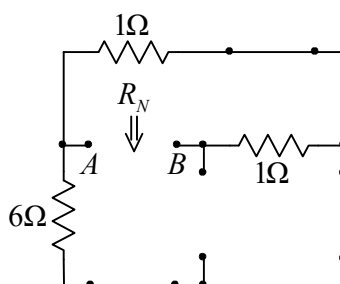
odakle je:

$$I_{KS} = -8A,$$

tako da je konačno:

$$I_N = I_{KS} = -8A.$$

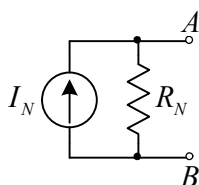
Otpornost traženog Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.81c:



Slika 1.81c

$$R_N = 1\Omega + 1\Omega = 2\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja I_{KS} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.81b), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 1.81d:



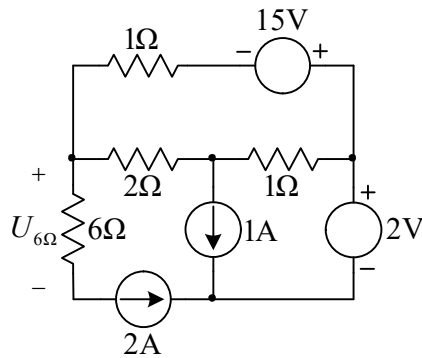
Slika 1.81d

d) Ako se u kolu iz postavke zadatka paralelno sa otpornikom otpornosti 6Ω poveže kondenzator kapacitivnosti $C = 1nF$, količina naelektrisanja na tom kondenzatoru će biti:

$$q = C \cdot U_{6\Omega},$$

gde je $U_{6\Omega}$ napon na otporniku otpornosti 6Ω , sa proizvoljno usvojenim referentnim smerom na način prikazan na slici 1.81e:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.81e

Napon $U_{6\Omega}$ se, po Omovom zakonu za otpornik otpornosti 6Ω , može izračunati na sledeći način:

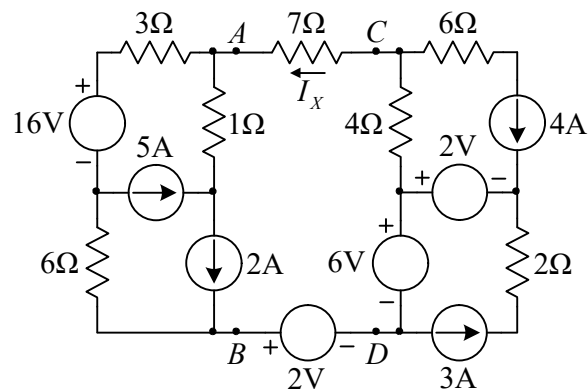
$$U_{6\Omega} = 2\text{ A} \cdot 6\Omega = 12\text{ V},$$

tako da je tražena količina naelektrisanja na kondenzatoru kapacitivnosti $C = 1\text{ nF}$:

$$q = C \cdot U_{6\Omega} = 12\text{ nC}.$$

1.82. Za kolo sa slike 1.82 odrediti:

- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B ;
- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola desno od tačaka C i D ;
- struju I_x i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 7Ω .

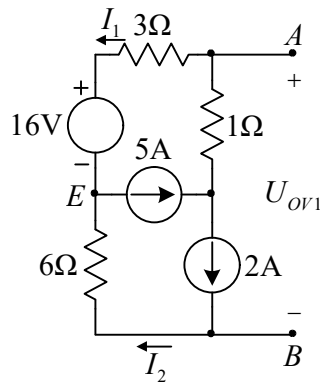


Slika 1.82

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.82a:

$$U_{T1} = U_{OV1}.$$



Slika 1.82a

Napon U_{OV1} (označen na slici 1.82a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T1} = U_{OV1} = -I_2 \cdot 6\Omega + 16V + I_1 \cdot 3\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_2 = 2A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor E :

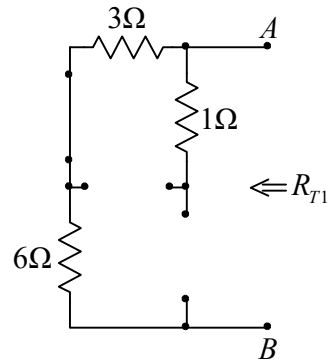
$$I_1 = 5A - I_2 = 3A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T1} = U_{OV1} = 13V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.82b:

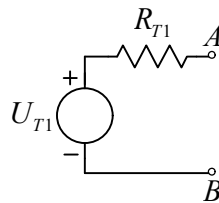
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.82b

$$R_{T1} = 3\Omega + 6\Omega = 9\Omega .$$

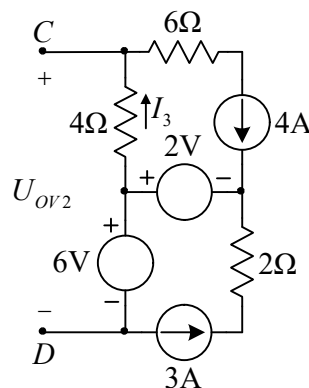
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov1} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.82a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.82c:



Slika 1.82c

b) Napon Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačaka C i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka C i D , nakon što se deo kola desno od tačaka C i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.82d:

$$U_{T2} = U_{ov2} .$$



Slika 1.82d

Napon U_{ov2} (označen na slici 1.82d) se može odrediti na sledeći način:

1. Električna kola stalnih struja

$$U_{T2} = U_{OV2} = 6V - I_3 \cdot 4\Omega.$$

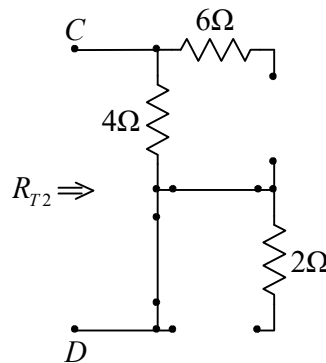
Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku C važi:

$$I_3 = 4A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T2} = U_{OV2} = -10V.$$

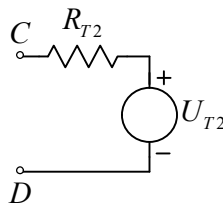
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.82e:



Slika 1.82e

$$R_{T2} = 4\Omega.$$

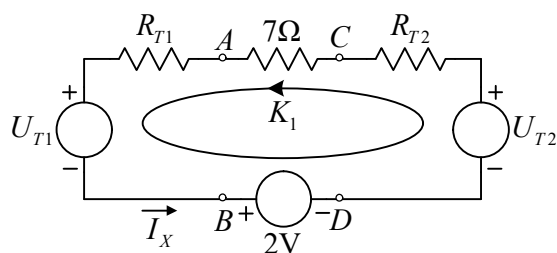
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV2} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.82d), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.82f:



Slika 1.82f

c) Korišćenjem rezultata dobijenih u tačkama a) i b) ovog zadatka, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.82g:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.82g

Za kolo sa slike 1.82g se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.82g) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$-U_{T1} - 2V + U_{T2} - I_X \cdot R_{T2} - I_X \cdot 7\Omega - I_X \cdot R_{T1} = 0,$$

odakle se dobija da je:

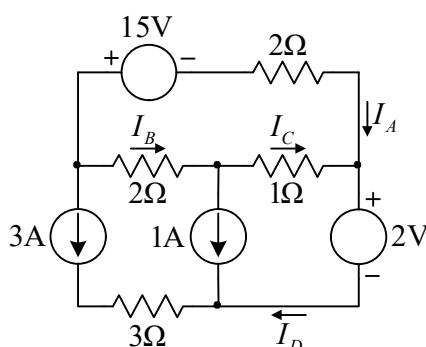
$$I_X = \frac{U_{T2} - U_{T1} - 2V}{R_{T1} + R_{T2} + 7\Omega} = -1.25A.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 7Ω iznosi:

$$P_{7\Omega} = I_X^2 \cdot 7\Omega = 10.9375W.$$

1.83. a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu sa slike 1.83. Odrediti i struje I_A , I_B , I_C i I_D .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, za svaki od generatora u kolu odrediti snagu koju predaje.



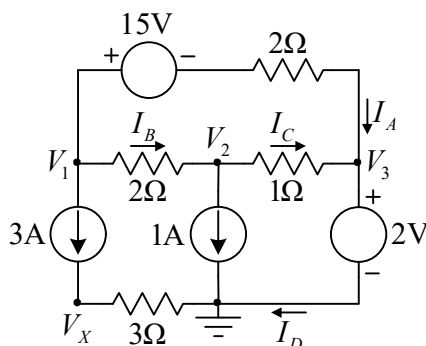
Slika 1.83

Rešenje:

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator napona $2V$), referentni čvor se ne

1. Električna kola stalnih struja

može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora napona 2V.



Slika 1.83a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 1.83a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 1.83a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + G_{13}V_3 &= I^{(1)} \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + G_{23}V_3 &= I^{(2)} \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_3 &= \frac{15V}{2\Omega} - 3A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_3 &= \frac{9V}{2\Omega} \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_3 &= -1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{2\Omega} \cdot 2V &= \frac{9V}{2\Omega} \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 - \frac{1}{1\Omega} \cdot 2V &= -1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1\Omega} \cdot V_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 &= \frac{11}{2}A \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 &= 1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} V_2 &= 2V_1 - 11V \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot V_2 &= 1A \\ V_3 &= 2V \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za V_2 u drugu jednačinu, sledi:

1. Električna kola stalnih struja

$$-\frac{1}{2\Omega} \cdot V_1 + \frac{3}{2\Omega} \cdot (2V_1 - 11V) = 1A \Rightarrow \frac{5}{2}V_1 = \frac{35}{2}V \Rightarrow V_1 = 7V.$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala V_1 u izvedeni izraz za potencijal V_2 , dobija se:

$$V_2 = 3V.$$

Struja I_A se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom napona $15V$:

$$I_A = \frac{(V_1 - 15V) - V_3}{2\Omega} = -5A.$$

Struja I_B se može izračunati pomoću Omovog zakona za otpornik otpornosti 2Ω koji je povezan između čvora čiji je potencijal V_1 i čvora čiji je potencijal V_2 :

$$I_B = \frac{V_1 - V_2}{2\Omega} = 2A.$$

Struja I_C se može odrediti primenom Omovog zakona za otpornik otpornosti 1Ω :

$$I_C = \frac{V_2 - V_3}{1\Omega} = 1A.$$

Struja I_D se može odrediti primenom Kirhofovog zakona za struje za čvor čiji je potencijal V_3 :

$$I_D = I_A + I_C = -4A.$$

b) Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $15V$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{15V} = 15V \cdot (-I_A) = 75W.$$

Snaga koju predaje idealni naponski generator napona $2V$ je:

$$P_{2V} = 2V \cdot (-I_D) = 8W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje $3A$ se može izračunati na sledeći način:

$$P_{3A} = (V_X - V_1) \cdot 3A,$$

gde je V_X potencijal donjeg priključka idealnog strujnog generatora struje $3A$ koji je označen na slici 1.83a, i koji se može odrediti na sledeći način:

$$V_X = 0 + 3\Omega \cdot 3A = 9V,$$

tako da se dobija da je:

1. Električna kola stalnih struja

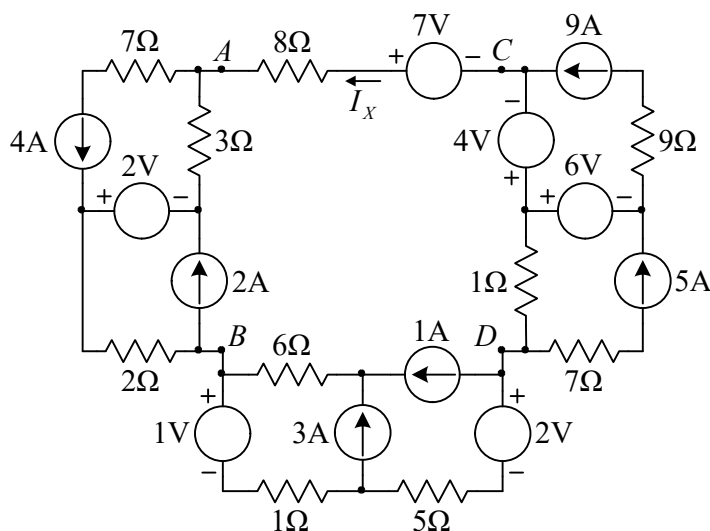
$$P_{3A} = (V_X - V_1) \cdot 3A = 6W.$$

Snaga koju predaje idealni strujni generator struje 1A je:

$$P_{1A} = (0 - V_2) \cdot 1A = -3W.$$

1.84. Za kolo sa slike 1.84 odrediti:

- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola levo od tačaka A i B ;
- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola desno od tačaka C i D ;
- ekvivalentni Tevenenov generator za deo kola ispod tačaka B i D ;
- struju I_X i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 8Ω .



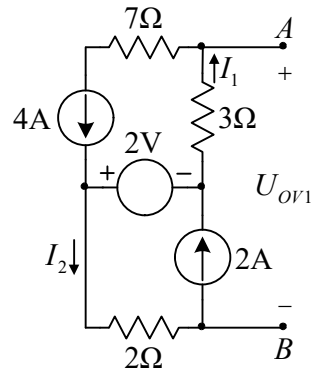
Slika 1.84

Rešenje:

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.84a:

$$U_{T1} = U_{OV1}.$$

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.84a

Napon U_{OV1} (označen na slici 1.84a) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T1} = U_{OV1} = I_2 \cdot 2\Omega - 2V - I_1 \cdot 3\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$I_2 = 2A,$$

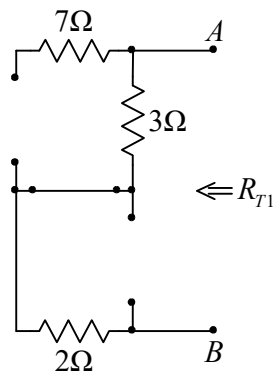
dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A :

$$I_1 = 4A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T1} = U_{OV1} = -10V.$$

Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.84b:

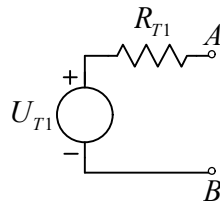


Slika 1.84b

$$R_{T1} = 3\Omega + 2\Omega = 5\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV1} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.84a), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.84c:

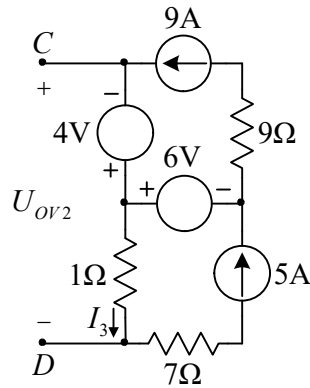
1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.84c

b) Napon Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačaka C i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka C i D , nakon što se deo kola desno od tačaka C i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.84d:

$$U_{T2} = U_{ov2}.$$



Slika 1.84d

Napon U_{ov2} (označen na slici 1.84d) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T2} = U_{ov2} = I_3 \cdot 1\Omega - 4V.$$

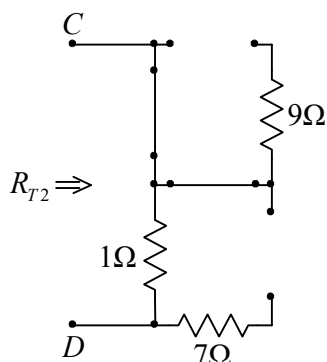
Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku D važi:

$$I_3 = 5A,$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T2} = U_{ov2} = 1V.$$

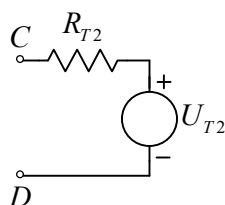
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.84e:



Slika 1.84e

$$R_{T2} = 1\Omega.$$

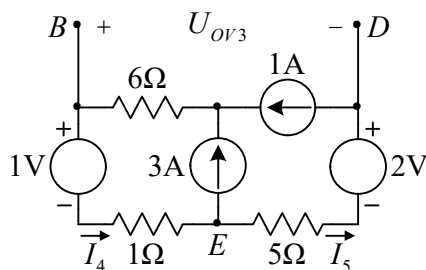
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{ov2} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.84d), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.84f:



Slika 1.84f

c) Napon Tevenenovog generatora za deo kola ispod tačaka B i D se određuje kao napon otvorene veze između tačaka B i D , nakon što se deo kola ispod tačaka B i D izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 1.84g:

$$U_{T3} = U_{ov3}.$$



Slika 1.84g

Napon U_{ov3} (označen na slici 1.84g) se može odrediti na sledeći način:

$$U_{T3} = U_{ov3} = -2V + I_5 \cdot 5\Omega + I_4 \cdot 1\Omega + 1V.$$

1. Električna kola stalnih struja

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku D važi:

$$I_5 = 1\text{A},$$

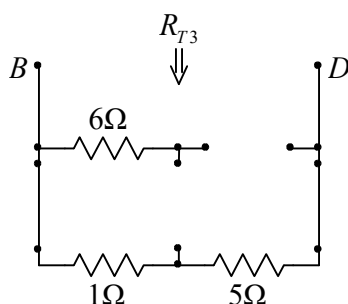
dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor E :

$$I_4 = I_5 + 3\text{A} = 4\text{A},$$

tako da se dobija da je:

$$U_{T3} = U_{OV3} = 8\text{V}.$$

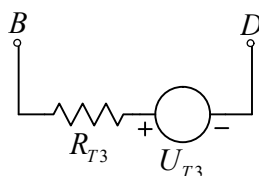
Otpornost Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 1.84h:



Slika 1.84h

$$R_{T3} = 1\Omega + 5\Omega = 6\Omega.$$

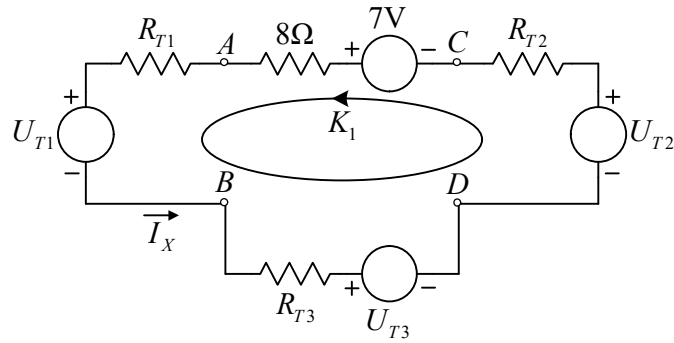
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze U_{OV3} (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 1.84g), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 1.84i:



Slika 1.84i

d) Korišćenjem rezultata dobijenih u tačkama **a)**, **b)** i **c)** ovog zadatka, kolo iz postavke zadatka se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 1.84j:

1. Električna kola stalnih struja



Slika 1.84j

Za kolo sa slike 1.84j se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 1.84j) u kojoj su naponi na odgovarajućim otpornicima izraženi preko Omovog zakona:

$$-U_{T1} - I_X \cdot R_{T3} - U_{T3} + U_{T2} - I_X \cdot R_{T2} + 7V - I_X \cdot 8\Omega - I_X \cdot R_{T1} = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$I_X = \frac{U_{T2} - U_{T1} - U_{T3} + 7V}{R_{T1} + R_{T2} + R_{T3} + 8\Omega} = 0.5A.$$

Snaga koja se disipira na otporniku otpornosti 8Ω iznosi:

$$P_{8\Omega} = I_X^2 \cdot 8\Omega = 2W.$$

Glava 2

ELEKTRIČNA KOLA PROSTOPERIODIČNIH STRUJA

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

2.1. a) Konvertovati napon $u_1(t) = 2V \cdot \cos(2\pi ft + 135^\circ)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen ako je poznato da je $f = 15\text{kHz}$.

b) Konvertovati struju $i_2(t) = -2\sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen ako je poznato da je $f = 25\text{kHz}$.

c) Konvertovati napon $\underline{U}_3 = (3 - j4)V$ iz kompleksnog domena u vremenski domen ako je poznato da je frekvencija odgovarajućeg napona u vremenskom domenu $f = 10\text{kHz}$.

d) Konvertovati struju $\underline{I}_4 = (-1 - j2)A$ iz kompleksnog domena u vremenski domen ako je poznato da je kružna učestanost odgovarajuće struje u vremenskom domenu $\omega = 20\text{krad/s}$.

Rešenje:

$$\text{a) } u_1(t) = 2V \cdot \cos(2\pi ft + 135^\circ) \rightarrow \underline{U}_1 = \sqrt{2}V \angle 135^\circ \rightarrow \underline{U}_1 = \sqrt{2}V \cdot e^{j135^\circ}$$

$$\underline{U}_1 = \sqrt{2}V \cdot (\cos 135^\circ + j \sin 135^\circ) = \sqrt{2}V \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_1 = (-1 + j)V.$$

$$\text{b) } i_2(t) = -2\sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft) = -2\sqrt{2}A \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -2\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ)$$

$$i_2(t) = -2\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_2 = -2A \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_2 = -2A \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = -2A \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -2A \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_2 = j2A.$$

$$\text{c) } \underline{U}_3 = (3 - j4)V \rightarrow \underline{U}_3 = \sqrt{3^2 + (-4)^2}V \cdot e^{j \arctg \frac{(-4)}{3}} = 5V \cdot e^{-j53.13^\circ} \rightarrow \underline{U}_3 = 5V \angle -53.13^\circ$$

$$\underline{U}_3 = 5V \angle -53.13^\circ \rightarrow u_3(t) = 5\sqrt{2}V \cdot \cos(2\pi ft - 53.13^\circ) \Rightarrow u_3(t) = 5\sqrt{2}V \cdot \cos(20000\pi t - 53.13^\circ)$$

d)

$$\underline{I}_4 = (-1 - j2)A \rightarrow \underline{I}_4 = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}A \cdot e^{j \left(180^\circ + \arctg \frac{(-2)}{(-1)} \right)} = \sqrt{5}A \cdot e^{j243.43^\circ} \rightarrow \underline{I}_4 = \sqrt{5}A \angle 243.43^\circ$$

$$\underline{I}_4 = \sqrt{5}A \angle 243.43^\circ \rightarrow i_4(t) = \sqrt{10}A \cdot \cos(\omega t + 243.43^\circ) \Rightarrow i_4(t) = \sqrt{10}A \cdot \cos(20000t + 243.43^\circ)$$

2.2. a) Konvertovati napon $u_1(t) = 8V \cdot \sin(\omega t - 45^\circ)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen ako je poznato da je $\omega = 10\text{krad/s}$.

b) Konvertovati struju $i_2(t) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(240^\circ - 2\pi ft)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen ako je poznato da je $f = 8\text{kHz}$.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

c) Konvertovati napon $\underline{U}_3 = (-1 + j3)V$ iz kompleksnog domena u vremenski domen ako je poznato da je frekvencija odgovarajućeg napona u vremenskom domenu $f = 20\text{kHz}$.

d) Konvertovati struju $\underline{I}_4 = (3 + j2)A$ iz kompleksnog domena u vremenski domen ako je poznato da je kružna učestanost odgovarajuće struje u vremenskom domenu $\omega = 10\text{krad/s}$.

Rešenje:

$$\text{a) } u_1(t) = 8V \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) = 8V \cdot \cos(90^\circ - (\omega t - 45^\circ)) = 8V \cdot \cos(135^\circ - \omega t)$$

$$u_1(t) = 8V \cdot \cos(135^\circ - \omega t) = 8V \cdot \cos(\omega t - 135^\circ) \rightarrow \underline{U}_1 = 4\sqrt{2}V \angle -135^\circ \rightarrow \underline{U}_1 = 4\sqrt{2}V \cdot e^{-j135^\circ}$$

$$\underline{U}_1 = 4\sqrt{2}V \cdot (\cos(-135^\circ) + j \sin(-135^\circ)) = 4\sqrt{2}V \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \underline{U}_1 = (-4 - j4)V.$$

$$\text{b) } i_2(t) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(240^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 240^\circ) = \sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 60^\circ)$$

$$i_2(t) = \sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 60^\circ) \rightarrow \underline{I}_2 = 1A \angle -60^\circ \rightarrow \underline{I}_2 = 1A \cdot e^{-j60^\circ}$$

$$\underline{I}_2 = 1A \cdot (\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)) = 1A \cdot \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \underline{I}_2 = \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)A.$$

c)

$$\underline{U}_3 = (-1 + j3)V \rightarrow \underline{U}_3 = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}V \cdot e^{j\left(180^\circ + \arctg\frac{3}{(-1)}\right)} = \sqrt{10}V \cdot e^{j108.43^\circ} \rightarrow \underline{U}_3 = \sqrt{10}V \angle 108.43^\circ$$

$$\underline{U}_3 = \sqrt{10}V \angle 108.43^\circ \rightarrow u_3(t) = 2\sqrt{5}V \cdot \cos(2\pi ft + 108.43^\circ) \Rightarrow u_3(t) = 2\sqrt{5}V \cdot \cos(40000\pi t + 108.43^\circ)$$

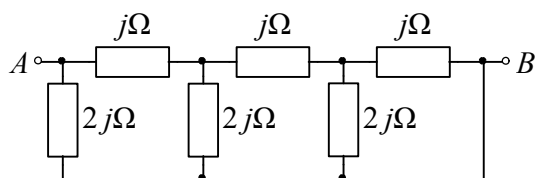
$$\text{d) } \underline{I}_4 = (3 + j2)A \rightarrow \underline{I}_4 = \sqrt{3^2 + 2^2}A \cdot e^{j\arctg\frac{2}{3}} = \sqrt{13}A \cdot e^{j33.69^\circ} \rightarrow \underline{I}_4 = \sqrt{13}A \angle 33.69^\circ$$

$$\underline{I}_4 = \sqrt{13}A \angle 33.69^\circ \rightarrow i_4(t) = \sqrt{26}A \cdot \cos(\omega t + 33.69^\circ) \Rightarrow i_4(t) = \sqrt{26}A \cdot \cos(10000t + 33.69^\circ)$$

2.3. a) Za mrežu impedansi sa slike 2.3 odrediti ekvivalentnu impedansu između tačaka A i B .

b) Ako mreža iz prethodne tačke radi na frekvenciji $f = 1\text{kHz}$, realizovati njenu ekvivalentnu impedansu pomoću minimalnog potrebnog broja proizvoljnih komponenti (otpornika, kalemova, kondenzatora) i odrediti njihove vrednosti.

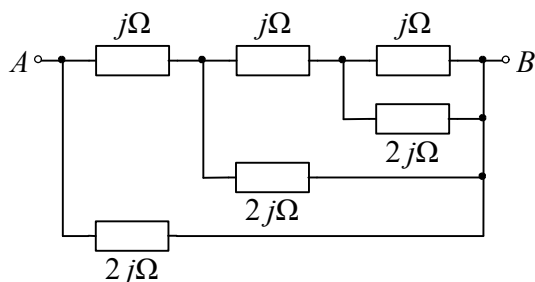
2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.3

Rešenje:

a) Mrežu impedansi sa slike 2.3 je moguće predstaviti i na način prikazan na slici 2.3a:



Slika 2.3a

Na osnovu slike 2.3a se može zaključiti da je ekvivalentna impedansa između tačaka A i B :

$$\underline{Z}_{EKV} = 2j\Omega \parallel \left(j\Omega + \left(2j\Omega \parallel \left(j\Omega + \left(2j\Omega \parallel j\Omega \right) \right) \right) \right) = \frac{42}{43} j\Omega.$$

b) Pošto je ekvivalentna impedansa iz tačke a) čisto imaginarna (tj. njen realni deo je jednak nuli) sa pozitivnim predznakom, ona se može realizovati pomoću jednog kalema, za čiju induktivnosti L na frekvenciji $f = 1\text{kHz}$ važi:

$$\underline{Z}_{EKV} = j2\pi fL,$$

odakle se dobija da je:

$$\frac{42}{43} j\Omega = j2\pi fL \Rightarrow L = \frac{42\Omega}{43 \cdot 2\pi f} \Rightarrow L \approx 155.5\mu\text{H}.$$

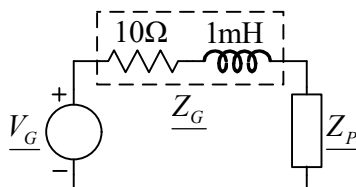
2.4. U kolu sa slike 2.4 amplituda prostoperiodičnog napona idealnog naponskog generatora $\underline{V}_G$ je 2V , a njegova učestanost je $\omega = 1\text{krad/s}$.

a) Odrediti impedansu $\underline{Z}_p$ prijemnika prilagođenog po snazi.

b) Pod uslovom iz tačke a), odrediti aktivnu snagu koju predaje idealni naponski generator $\underline{V}_G$ i aktivnu snagu koja se razvija na prijemniku $\underline{Z}_p$.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

c) Pod uslovom iz tačke a), realizovati prijemnik $\underline{Z}_P$ pomoću minimalnog potrebnog broja proizvoljnih komponenti (otpornika, kalemova, kondenzatora) i odrediti njihove vrednosti.



Slika 2.4

Rešenje:

a) Da bi u kolu iz postavke zadatka prijemnik bio prilagođen po snazi (tj. da bi se na prijemniku razvijala maksimalna aktivna snaga), neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_G^* .$$

Na osnovu slike 2.4 se može zaključiti da je:

$$\underline{Z}_G = 10\Omega + j\omega \cdot 1\text{mH} = 10\Omega + j1\Omega ,$$

tako da je:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_G^* = 10\Omega - j1\Omega .$$

b) Prema uslovu zadatka, napon idealnog naponskog generatora u vremenskom domenu je:

$$v_G(t) = 2\text{V} \cdot \cos(\omega t) .$$

Konvertovanjem napona idealnog naponskog generatora $v_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen se dobija:

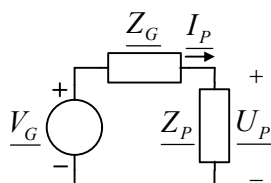
$$v_G(t) = 2\text{V} \cdot \cos(\omega t) \rightarrow \underline{V}_G = \sqrt{2}\text{V} \angle 0^\circ \rightarrow \underline{V}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j0^\circ} ,$$

$$\underline{V}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos(0^\circ) + j\sin(0^\circ)) = \sqrt{2}\text{V} \cdot (1 + j0) \Rightarrow \underline{V}_G = \sqrt{2}\text{V} .$$

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.4a, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_G$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{V}_G}{\underline{Z}_G + \underline{Z}_P} = \frac{\sqrt{2}\text{V}}{(10\Omega + j1\Omega) + (10\Omega - j1\Omega)} = \frac{\sqrt{2}}{20} \text{A} .$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.4a

Kompleksna snaga koju predaje idealni naponski generator $\underline{V}_G$ se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_G = \underline{V}_G \cdot \underline{I}_P^* = \sqrt{2}\text{V} \cdot \frac{\sqrt{2}}{20}\text{A} = \left(\frac{1}{10} + j0\right)\text{VA},$$

što znači da idealni naponski generator $\underline{V}_G$ predaje aktivnu snagu:

$$P_G = 0.1\text{W}.$$

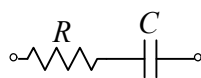
Kompleksna snaga koja se razvija na prijemniku $\underline{Z}_P$ (tj. koju prijemnik $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = (10\Omega - j1\Omega) \cdot \left|\frac{\sqrt{2}}{20}\text{A}\right|^2 = \left(\frac{1}{20} - j\frac{1}{200}\right)\text{VA},$$

što znači da se na prijemniku $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = 0.05\text{W}.$$

c) Pošto se impedansa prijemnika $\underline{Z}_P$ sastoji od pozitivnog realnog dela i negativnog imaginarnog dela, ona se može realizovati kao redna veza otpornika otpornosti R i kondenzatora kapacitivnosti C , na način prikazan na slici 2.4b:



Slika 2.4b

U tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} = 10\Omega - j1\Omega,$$

odakle se dobija da je:

$$R = 10\Omega,$$

kao i da je:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\frac{1}{\omega C} = 1\Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot 1\Omega} = \frac{1}{1\text{krad/s} \cdot 1\Omega} \Rightarrow C = 1\text{mF}.$$

2.5. U kolu sa prostoperiodičnim strujama, prijemnik se sastoji od redne veze kalema i otpornika otpornosti $R = 10\Omega$, i ima faktor snage $\cos\phi = 0.55$. Izračunati susceptansu kondenzatora kapacitivnosti C , kojim bi se izvršila korekcija faktora snage prijemnika tako da bude:

a) $\cos\phi = 0.7$,

b) $\cos\phi = 0.9$.

Rešenje:

Za prijemnik koji ima faktor snage $\cos\phi = 0.55$ je $\phi = 56.63^\circ$, tako da je u tom slučaju $\text{tg}\phi = 1.52$.

Prijemnik koji se sastoji od redne veze kalema induktivnosti L i otpornika otpornosti R ima impedansu:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = R + jX,$$

i za taj prijemnik važi:

$$\text{tg}\phi = \frac{Q}{P} = \frac{X}{R} = \frac{\omega L}{R},$$

gde je P aktivna snaga koja se razvija na impedansi $\underline{Z}$, Q reaktivna snaga koja se razvija na impedansi $\underline{Z}$, R rezistansa prijemnika čija je impedansa $\underline{Z}$, a X reaktansa prijemnika čija je impedansa $\underline{Z}$.

Za prijemnik iz postavke zadatka je, stoga:

$$\omega L = R \cdot \text{tg}\phi = 15.2\Omega.$$

Kada se kondenzator kapacitivnosti C poveže paralelno sa prijemnikom iz postavke zadatka, admitansa modifikovanog prijemnika će biti:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right) = G + jB,$$

što znači da je konduktansa modifikovanog prijemnika:

$$G = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2},$$

dok je njegova susceptansa:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$B = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Generalno, za prijemnik čija je admitansa $\underline{Y} = G + jB$, važi:

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{B}{G}.$$

a) Da bi faktor snage modifikovanog prijemnika (tj. prijemnika kod kojeg je izvršena korekcija faktora snage) bio $\cos \phi = 0.7$, neophodno je da bude:

$$\cos \phi = 0.7 \Rightarrow \phi = \pm 45.57^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \phi = \pm 1.02.$$

Na osnovu toga sledi:

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{B}{G} = -\frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}{\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}} = \pm 1.02,$$

tako da je:

$$\frac{\omega C \cdot (R^2 + (\omega L)^2) - \omega L}{R} = \pm 1.02 \Rightarrow \omega C = \frac{\pm 1.02 \cdot R + \omega L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

odakle se konačno dobijaju dva moguća rešenja za susceptansu traženog kondenzatora:

$$\omega C = 0.077 \Omega \text{ ili } \omega C = 0.015 \Omega.$$

b) Da bi faktor snage modifikovanog prijemnika (tj. prijemnika kod kojeg je izvršena korekcija faktora snage) bio $\cos \phi = 0.9$, neophodno je da bude:

$$\cos \phi = 0.9 \Rightarrow \phi = \pm 25.84^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} \phi = \pm 0.484.$$

Na osnovu toga sledi:

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{B}{G} = -\frac{\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}}{\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}} = \pm 0.484,$$

tako da je:

$$\frac{\omega C \cdot (R^2 + (\omega L)^2) - \omega L}{R} = \pm 0.484 \Rightarrow \omega C = \frac{\pm 0.484 \cdot R + \omega L}{R^2 + (\omega L)^2},$$

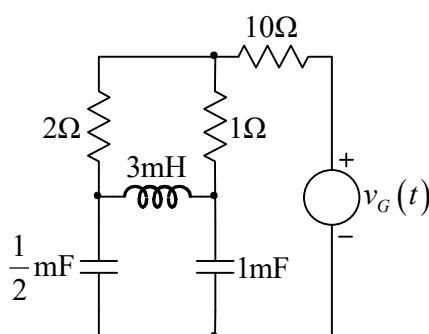
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

odakle se konačno dobijaju dva moguća rešenja za susceptansu traženog kondenzatora:

$$\omega C = 0.061\Omega \text{ ili } \omega C = 0.031\Omega.$$

Napomena: korekcija faktora snage prijemnika iz postavke zadatka bi mogla da se izvrši i rednim dodavanjem kondenzatora, ali se takav postupak retko primenjuje u praksi.

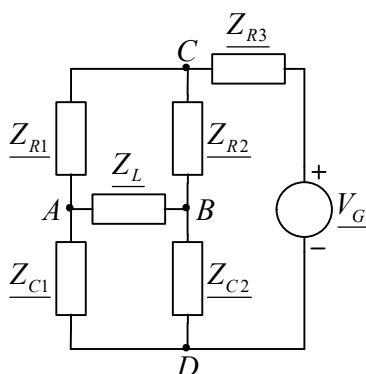
2.6. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.6 je poznato da je $v_G(t) = 1V \cdot \cos(\omega t + \theta)$. Odrediti reaktivnu snagu koja se razvija na kalemu.



Slika 2.6

Rešenje:

Ako se u kolu iz postavke zadatka, otpornici, kalem i kondenzatori predstave preko svojih impedansi, a napon idealnog naponskog generatora iz vremenskog domena konvertuje u kompleksni domen, dobija se prikaz kola (slika 2.6a) u kome su svi parametri predstavljeni u kompleksnom domenu.



Slika 2.6a

Impedanse otpornika u kolu iz postavke zadatka su: $\underline{Z}_{R1} = 2\Omega$, $\underline{Z}_{R2} = 1\Omega$ i $\underline{Z}_{R3} = 10\Omega$.

Impedanse kondenzatora se mogu izračunati na sledeći način:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_{C1} = \frac{1}{j\omega \cdot \frac{1}{2} \text{mF}} = \frac{2}{j\omega \cdot 1 \text{mF}} \text{ i } \underline{Z}_{C2} = \frac{1}{j\omega \cdot 1 \text{mF}}.$$

Impedansa kalema je:

$$\underline{Z}_L = j\omega \cdot 3 \text{mH}.$$

Na osnovu izračunatih vrednosti impedansi se može zaključiti da važi:

$$\frac{\underline{Z}_{R1}}{\underline{Z}_{C1}} = \frac{\underline{Z}_{R2}}{\underline{Z}_{C2}},$$

što znači da će zbog simetrije, koji god da je napon između čvorova C i D , potencijali čvorova A i B biti jednaki (tj. most impedansi će biti u ravnoteži). Iz toga se može zaključiti (na osnovu Omovog zakona za impedansu $\underline{Z}_L$) i da će struja kroz impedansu $\underline{Z}_L$ biti jednaka nuli, koliki god da je napon između čvorova C i D .

Ukoliko kroz proizvoljnu impedansu ne protiče struja, tada su sve snage (kompleksna, aktivna, reaktivna, prividna) koje se razvijaju na toj impedansi jednake nuli. Zbog toga će i reaktivna snaga, koja se u kolu iz postavke zadatka razvija na impedansi $\underline{Z}_L$ (tj. na kalemu induktivnosti 3mH) biti jednaka nuli.

2.7. Generator prostoperiodičnog napona ima unutrašnju impedansu $\underline{Z}_G = 10\Omega - j5\Omega$.

- a) Ako se na taj generator poveže potrošač čija je impedansa $\underline{Z}_P$, odrediti impedansu tog potrošača ako je poznato da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga.
b) Pod uslovom iz tačke a), odrediti faktor snage pomenutog potrošača.

Rešenje:

- a) Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_G^*,$$

tako da je:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_G^* = 10\Omega + j5\Omega.$$

- b) Za potrošač koji ima impedansu oblika:

$$\underline{Z}_P = R + jX,$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

važi:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{Q}{P} = \frac{X}{R},$$

gde je P aktivna snaga koja se razvija na impedansi $\underline{Z}_P$, Q reaktivna snaga koja se razvija na impedansi $\underline{Z}_P$, R rezistansa potrošača čija je impedansa $\underline{Z}_P$, a X reaktansa potrošača čija je impedansa $\underline{Z}_P$.

Za impedansu potrošača koja je izračunata pod tačkom a) ovog zadatka se dobija:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{5\Omega}{10\Omega} = 0.5 \Rightarrow \phi = 26.57^\circ,$$

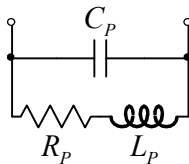
tako da je traženi faktor snage potrošača:

$$\cos \phi = 0.89.$$

2.8. a) Kroz potrošač impedanse $\underline{Z}_P$ protiče struja $\underline{I}_P = (1 + j)A$, dok je napon na njemu $\underline{U}_P = (1 - j)V$, pri čemu su referentni smer struje $\underline{I}_P$ i referentni smer napona $\underline{U}_P$ usaglašeni prema Omovom zakonu. Odrediti rezistansu, reaktansu, konduktansu i susceptansu tog potrošača, kao i prividnu snagu koja se na tom potrošaču razvija.

b) Efektivna vrednost struje kroz potrošač $\underline{Z}_{Pl} = R_l + jX_l$ je I_{Pl} . Kolika je aktivna, a kolika reaktivna snaga koja se razvija na tom potrošaču? Kolika je efektivna vrednost napona na tom potrošaču?

c) Na slici 2.8 je prikazan potrošač kroz koji protiče prostoperiodična struja učestanosti ω . Koji tip komponente (otpornik, kalem ili kondenzator) je potrebno povezati paralelno sa potrošačem sa slike da bi se ostvarila kompenzacija reaktivne snage? Odrediti vrednost te komponente u funkciji od R_P , L_P , C_P i ω .



Slika 2.8

Rešenje:

a) Impedansa potrošača $\underline{Z}_P$ se može odrediti primenom Omovog zakona:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_P = \frac{\underline{U}_P}{\underline{I}_P} = \frac{(1-j)V}{(1+j)A} = \frac{(1-j)^2}{1-j^2} \Omega = \frac{1-2j+j^2}{2} \Omega = -j\Omega = (0-j1)\Omega.$$

S obzirom da se impedansa potrošača $\underline{Z}_P$ može predstaviti kao:

$$\underline{Z}_P = R + jX,$$

može se zaključiti da je rezistansa potrošača $R = 0$, dok je njegova reaktansa $X = -1\Omega$.

Admitansa ovog potrošača se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{Y}_P = \frac{1}{\underline{Z}_P} = \frac{1}{-j\Omega} = jS = (0+j1)S.$$

S obzirom da se admitansa potrošača $\underline{Y}_P$ može predstaviti kao:

$$\underline{Y}_P = G + jB,$$

može se zaključiti da je konduktansa potrošača $G = 0$, dok je njegova susceptansa $B = 1S$.

Kompleksna snaga koja se na tom potrošaču razvija se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = (0-j1)\Omega \cdot \left(\sqrt{1^2+1^2}A\right)^2 = (0-j2)VA.$$

Tražena prividna snaga koja se razvija na potrošaču je:

$$S_P = |\underline{S}_P| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} VA = 2VA.$$

b) Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_{P1}$ se može izraziti na sledeći način:

$$\underline{S}_{P1} = \underline{U}_{P1} \cdot \underline{I}_{P1}^* = \underline{Z}_{P1} \cdot \underline{I}_{P1} \cdot \underline{I}_{P1}^* = \underline{Z}_{P1} \cdot |\underline{I}_{P1}|^2 = \underline{Z}_{P1} \cdot I_{P1}^2 = (R_1 + jX_1) \cdot I_{P1}^2 = R_1 \cdot I_{P1}^2 + jX_1 \cdot I_{P1}^2,$$

gde je $\underline{U}_{P1}$ napon na potrošaču $\underline{Z}_{P1}$, pri čemu su referentni smer struje $\underline{I}_{P1}$ i referentni smer napona $\underline{U}_{P1}$ usaglašeni prema Omovom zakonu.

Na osnovu dobijenog izraza za kompleksnu snagu se može zaključiti da su aktivna snaga i reaktivna snaga koje se razvijaju na potrošaču $\underline{Z}_{P1}$:

$$P_{P1} = R_1 \cdot I_{P1}^2 \text{ i } Q_{P1} = X_1 \cdot I_{P1}^2.$$

Prema Omovom zakonu za potrošač $\underline{Z}_{P1}$, važi:

$$\underline{U}_{P1} = \underline{Z}_{P1} \cdot \underline{I}_{P1},$$

odakle sledi da važi i:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$|U_{P1}| = |Z_{P1} \cdot I_{P1}| = |Z_{P1}| \cdot |I_{P1}|,$$

tako da je tražena efektivna vrednost napona na potrošaču Z_{P1} :

$$U_{P1} = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \cdot I_{P1}.$$

c) Admitansa potrošača sa slike 2.8 iznosi:

$$\underline{Y}_P = \frac{1}{R_P + j\omega L_P} + j\omega C_P = \frac{R_P - j\omega L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} + j\omega C_P = \frac{R_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} + j\omega \left(C_P - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right),$$

što znači da, imajući u vidu da je $\underline{Y}_P = G_P + jB_P$, njegova konduktansa iznosi:

$$G_P = \frac{R_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2},$$

dok je njegova susceptansa:

$$B_P = \omega \left(C_P - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right).$$

Da bi se ostvarila kompenzacija reaktivne snage koja se razvija na potrošaču, potrebno je da nakon povezivanja dodatne komponente paralelno sa potrošačem, ukupna susceptansa modifikovanog potrošača bude jednaka nuli (kako bi modifikovani potrošač imao čisto rezistivan karakter, tj. kako bi njegova impedansa i njegova admitansa bile čisto realne, jer je reaktivna snaga koja se razvija na impedansi ili admitansi koja je čisto realna, jednaka nuli).

U zavisnosti od toga da li je susceptansa nekompenzovanog potrošača B_P jednaka nuli, manja od nule ili veća od nule, kompenzacija reaktivne snage za potrošač sa slike 2.8 se vrši na jedan od sledeća tri načina:

1) Ako je $B_P = 0$, tj. ako je:

$$C_P = \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2},$$

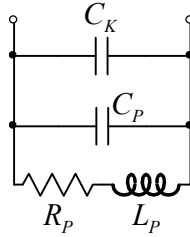
tada potrošač sa slike 2.8 ima čisto rezistivan karakter, tj. njegova impedansa i njegova admitansa su čisto realne, tako da je reaktivna snaga koja se razvija na potrošaču jednaka nuli. To znači da nije potrebno povezivati bilo kakvu dodatnu komponentu paralelno sa potrošačem, kako bi se ostvarila kompenzacija reaktivne snage.

2) Ako je $B_P < 0$, tj. ako je:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$C_P < \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2},$$

tada se kompenzacija reaktivne snage na potrošaču sa slike 2.8 može izvršiti povezivanjem kondenzatora kapacitivnosti C_K paralelno sa potrošačem, na način prikazan na slici 2.8a:



Slika 2.8a

U tom slučaju je ukupna admitansa modifikovanog potrošača:

$$\underline{Y}_{PK} = \frac{1}{R_P + j\omega L_P} + j\omega C_P + j\omega C_K = \frac{R_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} + j\omega \left(C_P + C_K - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right),$$

dok je njegova susceptansa:

$$B_{PK} = \omega \left(C_P + C_K - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right).$$

Da bi se ostvarila kompenzacija reaktivne snage koja se razvija na potrošaču, potrebno je da bude:

$$B_{PK} = 0,$$

tj. da dodati kondenzator ima kapacitivnost:

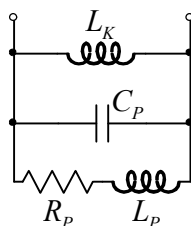
$$C_K = \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} - C_P.$$

3) Ako je $B_P > 0$, tj. ako je:

$$C_P > \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2},$$

tada se kompenzacija reaktivne snage na potrošaču sa slike 2.8 može izvršiti povezivanjem kalema induktivnosti L_K paralelno sa potrošačem, na način prikazan na slici 2.8b:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.8b

U tom slučaju je ukupna admitansa modifikovanog potrošača:

$$\underline{Y}_{PK} = \frac{1}{R_P + j\omega L_P} + j\omega C_P + \frac{1}{j\omega L_K} = \frac{R_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} + j\omega \left(C_P - \frac{1}{\omega^2 L_K} - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right),$$

dok je njegova susceptansa:

$$B_{PK} = \omega \left(C_P - \frac{1}{\omega^2 L_K} - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right).$$

Da bi se ostvarila kompenzacija reaktivne snage koja se razvija na potrošaču, potrebno je da bude:

$$B_{PK} = 0,$$

tj. da dodati kalem ima induktivnost:

$$L_K = \frac{1}{\omega^2 \left(C_P - \frac{L_P}{R_P^2 + (\omega L_P)^2} \right)}.$$

2.9. Potrošač se može modelovati rednom vezom otpornika nepoznate otpornosti R i kalema nepoznate induktivnosti L . Ako se potrošač poveže na idealni generator prostoperiodičnog napona učestanosti ω i efektivne vrednosti U , na njemu se razvija aktivna snaga P i reaktivna snaga Q .

a) Odrediti prividnu snagu koja se razvija na potrošaču i faktor snage potrošača.

b) Odrediti otpornost R i induktivnost L .

c) Kolika se snaga razvija na potrošaču, ako se on poveže na idealni generator konstantnog napona U ?

Rešenje:

a) Prividna snaga koja se razvija na potrošaču se može odrediti na sledeći način:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

dok je faktor snage tog potrošača:

$$\cos \phi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

b) Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču iz postavke zadatka, čija je impedansa $\underline{Z} = R + j\omega L$, kroz koji protiče struja $\underline{I}$, i na čijim krajevima je napon $\underline{U}$, pri čemu su referentni smer struje $\underline{I}$ i referentni smer napona $\underline{U}$ usaglašeni prema Omovom zakonu, se može izraziti na sledeći način:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot |\underline{I}|^2 = \underline{Z} \cdot I^2 = (R + j\omega L) \cdot I^2 = RI^2 + j\omega LI^2 = P + jQ.$$

Na osnovu dobijenog izraza za kompleksnu snagu se može zaključiti da su aktivna snaga i reaktivna snaga koje se razvijaju na potrošaču impedanse $\underline{Z} = R + j\omega L$:

$$P = RI^2,$$

$$Q = \omega LI^2.$$

Iz prethodna dva izraza se mogu izraziti otpornost R i induktivnost L , na sledeći način:

$$R = \frac{P}{I^2},$$

$$L = \frac{Q}{\omega I^2}.$$

Na osnovu sledećeg izraza za kompleksnu snagu:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*,$$

sledi da je:

$$|\underline{S}| = |\underline{U} \cdot \underline{I}^*| \Rightarrow |\underline{S}| = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}^*| \Rightarrow S = U \cdot I,$$

odakle se dobija da je:

$$I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U} \Rightarrow I^2 = \frac{P^2 + Q^2}{U^2}.$$

Zamenom dobijenog izraza za I^2 u već izvedene izraze za otpornost R i induktivnost L , dobija se da je, konačno:

$$R = \frac{PU^2}{P^2 + Q^2} \text{ i } L = \frac{QU^2}{\omega(P^2 + Q^2)}.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

c) Ako se potrošač iz postavke zadatka poveže na idealni generator konstantnog napona U , dobijeno kolo će biti kolo sa konstantnim (tj. stalnim) strujama. Konstantni napon ili struja se mogu dobiti polazeći od prostoperiodičnog napona ili struje kada učestanost prostoperiodičnog napona ili struje $\omega \rightarrow 0$. S obzirom da je impedansa kalema induktivnosti L kada $\omega \rightarrow 0$:

$$Z_L = j\omega L \rightarrow 0,$$

može se izvesti zaključak da se u kolu sa konstantnim (stalnim) strujama kalem može zameniti kratkim spojem (jer je impedansa kratkog spoja jednaka nuli), tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo.

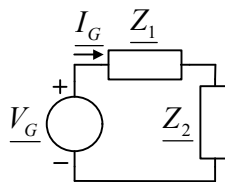
Zbog toga se potrošač iz postavke zadatka može modelovati otpornikom otpornosti R , u situaciji kada se taj potrošač poveže na idealni generator konstantnog napona U . Snaga koja se razvija na potrošaču u tom slučaju je:

$$P_1 = \frac{U^2}{R} = \frac{P^2 + Q^2}{P}.$$

2.10. U kolu sa slike 2.10 impedanse $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ su realizovane kao redna veza otpornika i kalema. Poznato je i da je $\underline{Z}_1 = 40\Omega + j30\Omega$. Kada je napon idealnog naponskog generatora konstantan i jednak 220V, struja koja izlazi iz generatora je 2.2A (za referentne smerove označene na slici 2.10). Kada je napon idealnog naponskog generatora prostoperiodičan, efektivne vrednosti $V_G = 220V$, efektivna vrednost struje koja izlazi iz generatora je $I_G = 1.56A$.

a) Odrediti faktor snage impedanse $\underline{Z}_2$.

b) Odrediti faktor snage ekvivalentne impedanse redne veze impedansi $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$.



Slika 2.10

Rešenje:

S obzirom da su, po uslovu zadatka, impedanse $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ realizovane kao redna veza otpornika i kalema, te impedanse se mogu predstaviti na sledeći način:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 40\Omega + j30\Omega,$$

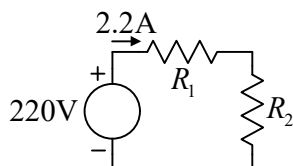
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2.$$

Iz prve jednačine se dobija da je:

$$R_1 = 40\Omega \text{ i } \omega L_1 = 30\Omega.$$

U kolu sa konstantnim (tj. stalnim) strujama, kalem se može zameniti kratkim spojem, tako da se dobije potpuno ekvivalentno kolo. Zbog toga se kolo sa slike 2.10, kada je napon idealnog naponskog generatora konstantan i jednak 220V, može predstaviti ekvivalentnom šemom prikazanom na slici 2.10a:



Slika 2.10a

Na osnovu Omovog zakona za rednu vezu otpornika R_1 i R_2 u kolu sa slike 2.10a, važi:

$$220\text{V} = (R_1 + R_2) \cdot 2.2\text{A},$$

odakle se dobija da je:

$$R_2 = \frac{220\text{V}}{2.2\text{A}} - R_1 = 60\Omega.$$

Kada je napon idealnog naponskog generatora u kolu sa slike 2.10 prostoperiodičan, za to kolo se može napisati jednačina po Omovom zakonu za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$, na sledeći način:

$$\underline{V}_G = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \cdot \underline{I}_G.$$

Zamenom izraza za impedanse $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ se dobija:

$$\underline{V}_G = (R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2) \cdot \underline{I}_G = (R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)) \cdot \underline{I}_G,$$

iz čega dalje sledi:

$$|\underline{V}_G| = |R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)| \cdot |\underline{I}_G| \Rightarrow V_G = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega(L_1 + L_2))^2} \cdot I_G.$$

Kvadriranjem i leve i desne strane poslednje jednačine, dobija se:

$$V_G^2 = \left[(R_1 + R_2)^2 + (\omega(L_1 + L_2))^2 \right] \cdot I_G^2,$$

odakle sledi:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\left(\omega(L_1 + L_2)\right)^2 = \frac{V_G^2}{I_G^2} - (R_1 + R_2)^2 \Rightarrow \omega L_2 = \sqrt{\frac{V_G^2}{I_G^2} - (R_1 + R_2)^2} - \omega L_1.$$

Zamenom brojnih vrednosti u izvedeni izraz za ωL_2 , dobija se da je:

$$\omega L_2 = 69.44\Omega.$$

a) Za impedansu $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ važi:

$$\operatorname{tg}\phi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{\omega L_2}{R_2} = 1.16 \Rightarrow \phi_2 = 49.17^\circ,$$

tako da je faktor snage impedanse $\underline{Z}_2$:

$$\cos\phi_2 = 0.65.$$

b) Ekvivalentna impedansa redne veze impedansi $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$ je:

$$\underline{Z}_{EKV} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 = (R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2) = R_{EKV} + j\omega L_{EKV},$$

gde je:

$$R_{EKV} = R_1 + R_2 = 100\Omega \text{ i } \omega L_{EKV} = \omega L_1 + \omega L_2 = 99.44\Omega.$$

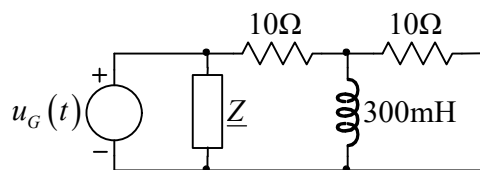
Za ekvivalentnu impedansu $\underline{Z}_{EKV} = R_{EKV} + j\omega L_{EKV}$ važi:

$$\operatorname{tg}\phi_{EKV} = \frac{X_{EKV}}{R_{EKV}} = \frac{\omega L_{EKV}}{R_{EKV}} = 0.99 \Rightarrow \phi_{EKV} = 44.84^\circ,$$

tako da je faktor snage ekvivalentne impedanse redne veze impedansi $\underline{Z}_1$ i $\underline{Z}_2$:

$$\cos\phi_{EKV} = 0.71.$$

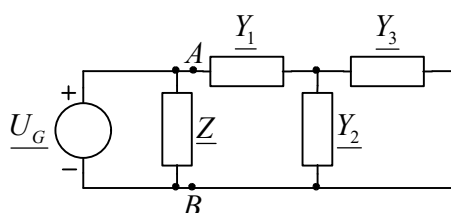
2.11. U kolu sa slike 2.11 prostoperiodični idealni naponski generator $u_G(t)$ radi na frekvenciji $f = 50\text{Hz}$. Odrediti impedansu $\underline{Z}$ tako da se ostvari maksimalna kompenzacija reaktivne snage cele grupe komponenti koje su povezane na generator.



Slika 2.11

Rešenje:

Ako se u kolu iz postavke zadatka, otpornici i kalem predstave preko svojih admitansi, a napon idealnog naponskog generatora iz vremenskog domena konvertuje u kompleksni domen, dobija se prikaz kola (slika 2.11a) u kome su svi parametri predstavljeni u kompleksnom domenu.



Slika 2.11a

Admitanse otpornika u kolu iz postavke zadatka su:

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \frac{1}{10\Omega} = 0.1\text{S}.$$

Admitansa kalema se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{j2\pi f \cdot 300\text{mH}} = -j0.0106\text{S}.$$

Ekvivalentna admitansa dela kola sa slike 2.11a desno od tačaka A i B se može izračunati na sledeći način:

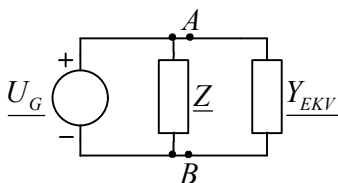
$$\underline{Y}_{EKV} = \frac{\underline{Y}_1 \cdot (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)}{\underline{Y}_1 + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)} = \frac{0.01 - j0.00106}{0.2 - j0.0106}\text{S} = \frac{(0.01 - j0.00106) \cdot (0.2 + j0.0106)}{0.04011236}\text{S}.$$

Sređivanjem poslednjeg izraza, dobija se:

$$\underline{Y}_{EKV} = \frac{0.002011236 - j0.000106}{0.04011236}\text{S} = (0.05014 - j0.00264)\text{S} = G_{EKV} + jB_{EKV}.$$

Na slici 2.11b je prikazana ekvivalentna šema kola sa slike 2.11a, nakon što je deo kola desno od tačaka A i B predstavljen ekvivalentnom admitansom $\underline{Y}_{EKV}$:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.11b

Kompenzacija reaktivne snage cele grupe komponenti koje su povezane na generator se može izvršiti izborom vrednosti impedanse $\underline{Z}$ na sledeći način:

$$\frac{1}{\underline{Z}} = -jB_{EKV}.$$

Naime, u tom slučaju će ukupna admitansa cele grupe komponenti koje su povezane na generator iznositi:

$$\underline{Y}_{UK} = \frac{1}{\underline{Z}} + \underline{Y}_{EKV} = -jB_{EKV} + G_{EKV} + jB_{EKV} = G_{EKV}.$$

što znači da će biti čisto realna, tako da će reaktivna snaga koja se razvija na njoj biti jednaka nuli.

Tražena vrednost impedanse $\underline{Z}$ će stoga biti:

$$\underline{Z} = -\frac{1}{jB_{EKV}} = \frac{1}{j0.00264} \Omega = -j378.8 \Omega.$$

Ovu impedansu na frekvenciji $f = 50\text{Hz}$ ima kondenzator kapacitivnosti:

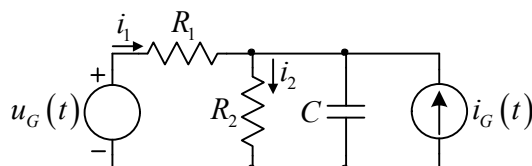
$$C = \frac{1}{j2\pi f \cdot \underline{Z}} = \frac{1}{j2\pi f \cdot (-j378.8 \Omega)} = \frac{1}{2\pi f \cdot 378.8 \Omega} = 8.4 \mu\text{F}.$$

2.12. Za kolo sa slike 2.12 je poznato da je $R_1 = 3R_2 = 1.5\text{k}\Omega$, $u_G(t) = 1\text{V} + 1\text{V} \cdot \sin(\omega t)$ i $i_G(t) = 1\text{mA}$.

a) Primenom metoda superpozicije odrediti struje $i_1(t)$ i $i_2(t)$ ako kapacitivnost kondenzatora $C \rightarrow 0$.

b) Primenom metoda superpozicije odrediti struje $i_1(t)$ i $i_2(t)$ ako kapacitivnost kondenzatora $C \rightarrow \infty$.

c) Impedansa $\underline{Z}_P = (100 - j10)\Omega$ se sastoji od redne veze dve nepoznate komponente (otpornika, kalemova, kondenzatora). Odrediti koje su to komponente i koje su njihove vrednosti ako kolo sa prostoperiodičnim strujama u kome se nalazi pomenuta impedansa radi na frekvenciji $f = 50\text{Hz}$.



Slika 2.12

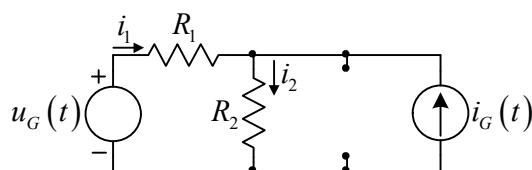
Rešenje:

a) Kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow 0$ se može ekvivalentirati otvorenom vezom. Naime, u kolima sa konstantnim strujama u ustaljenom stanju kroz kondenzatore ne protiče struja, što znači da se u tim slučajevima kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama (bez obzira na vrednost njihove kapacitivnosti). U kolima sa prostoperiodičnim strujama (koja rade na konačnoj učestanosti ω) impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C \rightarrow 0$ je:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty,$$

iz čega se može izvesti zaključak da se i u kolima sa prostoperiodičnim strujama kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow 0$ može ekvivalentirati otvorenom vezom (jer impedansa otvorene veze teži beskonačnosti).

Iz tog razloga se kolo iz postavke zadatka, u slučaju kada $C \rightarrow 0$, može predstaviti ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 2.12a:



Slika 2.12a

Struja i_1 se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente i_1' koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator $u_G(t)$, dok je idealni strujni generator $i_G(t)$ anuliran, i komponente i_1'' koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator $i_G(t)$, dok je idealni naponski generator $u_G(t)$ anuliran:

$$i_1 = i_1' + i_1'',$$

$$i_1' = i_1(u_G(t) \neq 0, i_G(t) = 0),$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$i_1'' = i_1(u_G(t) = 0, i_G(t) \neq 0).$$

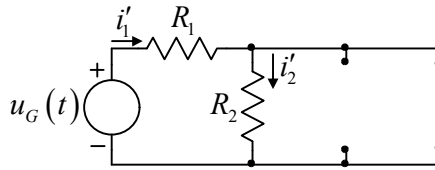
Struja i_2 se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente i_2' koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator $u_G(t)$, dok je idealni strujni generator $i_G(t)$ anuliran, i komponente i_2'' koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator $i_G(t)$, dok je idealni naponski generator $u_G(t)$ anuliran:

$$i_2 = i_2' + i_2'',$$

$$i_2' = i_2(u_G(t) \neq 0, i_G(t) = 0),$$

$$i_2'' = i_2(u_G(t) = 0, i_G(t) \neq 0).$$

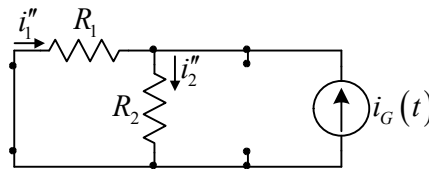
Superpozicione komponente i_1' i i_2' se mogu odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.12b (u kom je idealni strujni generator $i_G(t)$ anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom) primenom Omovog zakona za rednu vezu otpornika R_1 i R_2 :



Slika 2.12b

$$i_1' = i_2' = \frac{u_G(t)}{R_1 + R_2} = 0.5\text{mA} + 0.5\text{mA} \cdot \sin(\omega t).$$

Superpozicione komponente i_1'' i i_2'' se mogu odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.12c (u kom je idealni naponski generator $u_G(t)$ anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formula za strujni razdelnik:



Slika 2.12c

$$i_1'' = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i_G(t) = -\frac{1}{4} i_G(t) = -0.25\text{mA},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$i_2'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i_G(t) = \frac{3}{4} i_G(t) = 0.75 \text{mA}.$$

Konačno, dobija se da je:

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 0.25 \text{mA} + 0.5 \text{mA} \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 1.25 \text{mA} + 0.5 \text{mA} \cdot \sin(\omega t).$$

b) Zbog činjenice da u kolima sa konstantnim strujama u ustaljenom stanju kroz kondenzatore ne protiče struja, u takvim kolima se kondenzatori mogu ekvivalentirati otvorenim vezama (bez obzira na vrednost njihove kapacitivnosti). Iz tog razloga se u takvim kolima i kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow \infty$ može ekvivalentirati otvorenom vezom.

U kolima sa prostoperiodičnim strujama (koja rade na konačnoj učestanosti ω) impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C \rightarrow \infty$ je:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0,$$

iz čega se može izvesti zaključak da se u kolima sa prostoperiodičnim strujama kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow \infty$ može ekvivalentirati kratkim spojem (jer je impedansa kratkog spoja jednaka nuli).

Napon idealnog naponskog generatora iz postavke zadatka se može predstaviti i na sledeći način:

$$u_G(t) = 1\text{V} + 1\text{V} \cdot \sin(\omega t) = u_G'(t) + u_G''(t),$$

gde je $u_G'(t) = 1\text{V}$ jednosmerna komponenta napona pomenutog generatora, a $u_G''(t) = 1\text{V} \cdot \sin(\omega t)$ prostoperiodična komponenta napona pomenutog generatora.

Struja i_1 se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente i_1' koja nastaje kada u kolu deluje samo jednosmerna komponenta $u_G'(t)$ napona idealnog naponskog generatora (dok su prostoperiodična komponenta $u_G''(t)$ napona idealnog naponskog generatora i idealni strujni generator $i_G(t)$ anulirani), komponente i_1'' koja nastaje kada u kolu deluje samo prostoperiodična komponenta $u_G''(t)$ napona idealnog naponskog generatora (dok su jednosmerna komponenta $u_G'(t)$ napona idealnog naponskog generatora i idealni strujni generator $i_G(t)$ anulirani) i komponente i_1''' koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator $i_G(t)$ (dok su jednosmerna komponenta $u_G'(t)$ napona idealnog naponskog generatora i prostoperiodična komponenta $u_G''(t)$ napona idealnog naponskog generatora anulirane):

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$i_1 = i_1' + i_1'' + i_1''' ,$$

$$i_1' = i_1 \left(u_G'(t) \neq 0, u_G''(t) = 0, i_G(t) = 0 \right) ,$$

$$i_1'' = i_1 \left(u_G'(t) = 0, u_G''(t) \neq 0, i_G(t) = 0 \right) ,$$

$$i_1''' = i_1 \left(u_G'(t) = 0, u_G''(t) = 0, i_G(t) \neq 0 \right) .$$

Struja i_2 se može predstaviti kao zbir tri superpozicione komponente i to: komponente i_2' koja nastaje kada u kolu deluje samo jednosmerna komponenta $u_G'(t)$ napona idealnog naponskog generatora (dok su prostoperiodična komponenta $u_G''(t)$ napona idealnog naponskog generatora i idealni strujni generator $i_G(t)$ anulirani), komponente i_2'' koja nastaje kada u kolu deluje samo prostoperiodična komponenta $u_G''(t)$ napona idealnog naponskog generatora (dok su jednosmerna komponenta $u_G'(t)$ napona idealnog naponskog generatora i idealni strujni generator $i_G(t)$ anulirani) i komponente i_2''' koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator $i_G(t)$ (dok su jednosmerna komponenta $u_G'(t)$ napona idealnog naponskog generatora i prostoperiodična komponenta $u_G''(t)$ napona idealnog naponskog generatora anulirane):

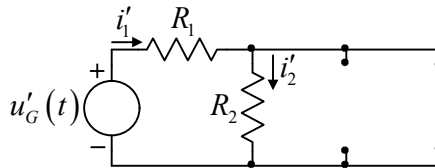
$$i_2 = i_2' + i_2'' + i_2''' ,$$

$$i_2' = i_2 \left(u_G'(t) \neq 0, u_G''(t) = 0, i_G(t) = 0 \right) ,$$

$$i_2'' = i_2 \left(u_G'(t) = 0, u_G''(t) \neq 0, i_G(t) = 0 \right) ,$$

$$i_2''' = i_2 \left(u_G'(t) = 0, u_G''(t) = 0, i_G(t) \neq 0 \right) .$$

Superpozicione komponente i_1' i i_2' se mogu odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.12d (u kom je idealni strujni generator $i_G(t)$ anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow \infty$ ekvivalentiran otvorenom vezom, jer je kolo sa slike 2.12d kolo sa konstantnim strujama) primenom Omovog zakona za rednu vezu otpornika R_1 i R_2 :

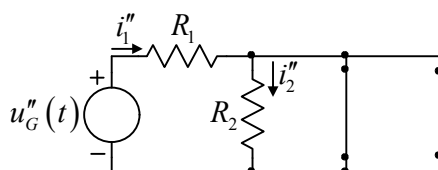


Slika 2.12d

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$i_1' = i_2' = \frac{u_G'(t)}{R_1 + R_2} = 0.5 \text{ mA}.$$

Superpozicione komponente i_1'' i i_2'' se mogu odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.12e (u kom je idealni strujni generator $i_G(t)$ anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom, a kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow \infty$ ekvivalentiran kratkim spojem, jer je kolo sa slike 2.12e kolo sa prostoperiodičnim strujama) primenom Omovog zakona za otpornike otpornosti R_1 i R_2 , respektivno:

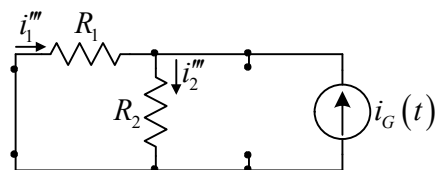


Slika 2.12e

$$i_1'' = \frac{u_G''(t)}{R_1} = \frac{2}{3} \text{ mA} \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_2'' = \frac{0}{R_2} = 0.$$

Superpozicione komponente i_1''' i i_2''' se mogu odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.12f (u kom je idealni naponski generator $u_G(t)$ anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem, a kondenzator kapacitivnosti $C \rightarrow \infty$ ekvivalentiran otvorenom vezom, jer je kolo sa slike 2.12f kolo sa konstantnim strujama) primenom formula za strujni razdelnik:



Slika 2.12f

$$i_1''' = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i_G(t) = -\frac{1}{4} i_G(t) = -0.25 \text{ mA},$$

$$i_2''' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot i_G(t) = \frac{3}{4} i_G(t) = 0.75 \text{ mA}.$$

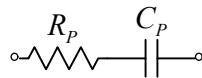
Konačno, dobija se da je:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$i_1 = i_1' + i_1'' + i_1''' = 0.25\text{mA} + \frac{2}{3}\text{mA} \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' + i_2''' = 1.25\text{mA}.$$

c) Pošto se impedansa $\underline{Z}_P = (100 - j10)\Omega$ sastoji od pozitivnog realnog dela i negativnog imaginarnog dela, ona se može realizovati kao redna veza otpornika otpornosti R_p i kondenzatora kapacitivnosti C_p , na način prikazan na slici 2.12g:



Slika 2.12g

U tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R_p + \frac{1}{j2\pi f C_p} = R_p - \frac{j}{2\pi f C_p} = 100\Omega - j10\Omega,$$

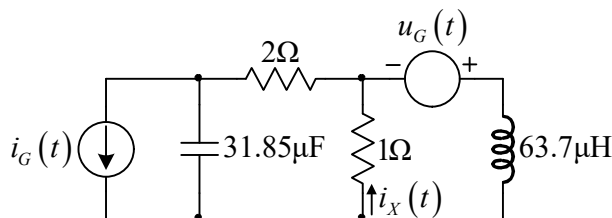
odakle se dobija da je:

$$R_p = 100\Omega,$$

kao i da je:

$$\frac{1}{2\pi f C_p} = 10\Omega \Rightarrow C_p = \frac{1}{2\pi f \cdot 10\Omega} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot 10\Omega} \Rightarrow C_p = 318.3\mu\text{F}.$$

2.13. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.13 je poznato: $u_G(t) = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_G(t) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$ i $f = 5\text{kHz}$. Primenom metoda potencijala čvorova odrediti struju $i_X(t)$.



Slika 2.13

Rešenje:

Impedanse otpornika iz kola sa slike 2.13 su:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_{R_1} = 2\Omega \text{ i } \underline{Z}_{R_2} = 1\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 31.85\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot 31.85\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot 31.85\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 63.7\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j2\pi f \cdot 63.7\mu\text{H} = j2\pi \cdot 5\text{kHz} \cdot 63.7\mu\text{H} = j2\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft) = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$u_G(t) = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = 2\text{V} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_G = 2\text{V} \cdot e^{-j90^\circ},$$

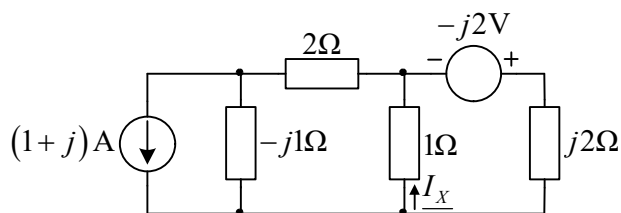
$$\underline{U}_G = 2\text{V} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = 2\text{V} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_G = -j2\text{V}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = \sqrt{2}\text{A} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{I}_G = \sqrt{2}\text{A} \cdot e^{j45^\circ},$$

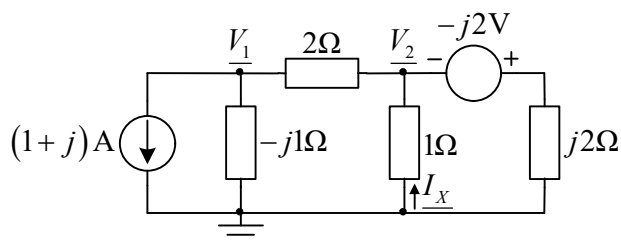
$$\underline{I}_G = \sqrt{2}\text{A} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_G = (1 + j)\text{A}.$$

Na slici 2.13a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.13a

S obzirom da u zadatom kolu ne postoji nijedan idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora, referentni čvor se može proizvoljno izabrati.



Slika 2.13b

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 2.13b, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 2.13b, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{V}_2 &= \underline{I}^{(1)} \\ \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 &= \underline{I}^{(2)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{-j1\Omega} \right) \cdot \underline{V}_1 - \frac{1}{2\Omega} \cdot \underline{V}_2 &= -(1+j) \text{ A} \\ -\frac{1}{2\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{j2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 &= -\frac{j2\text{V}}{j2\Omega} \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{aligned} \frac{-j+2}{-j2} \cdot \underline{V}_1 - \frac{1}{2} \cdot \underline{V}_2 &= -(1+j) \text{ V} \\ -\frac{1}{2} \cdot \underline{V}_1 + \frac{j+j2+1}{j2} \cdot \underline{V}_2 &= 1 \text{ V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{-2+j}{j2} \cdot \underline{V}_1 - \frac{1}{2} \cdot \underline{V}_2 &= -(1+j) \text{ V} \\ \underline{V}_1 &= \frac{1+j3}{j} \cdot \underline{V}_2 - 2 \text{ V} \end{aligned} \right\}.$$

Zamenom dobijenog izraza za $\underline{V}_1$ u prvu jednačinu, sledi:

$$\begin{aligned} \frac{-2+j}{j2} \cdot \left(\frac{1+j3}{j} \cdot \underline{V}_2 - 2 \text{ V} \right) - \frac{1}{2} \cdot \underline{V}_2 &= -(1+j) \text{ V} \Rightarrow \left(\frac{-2+j}{j2} \cdot \frac{1+j3}{j} - \frac{1}{2} \right) \cdot \underline{V}_2 = \left(\frac{-2+j}{j} - (1+j) \right) \text{ V} \\ \frac{-4-j5}{-2} \cdot \underline{V}_2 &= -\frac{1}{j} \text{ V} \Rightarrow \underline{V}_2 = \frac{2}{j(-4-j5)} \text{ V} = \frac{j2}{4+j5} \text{ V} \Rightarrow \underline{V}_2 = \left(\frac{10}{41} + j\frac{8}{41} \right) \text{ V}. \end{aligned}$$

Zamenom izračunate vrednosti potencijala $\underline{V}_2$ u izvedeni izraz za potencijal $\underline{V}_1$, dobija se:

$$\underline{V}_1 = \frac{1+j3}{j} \cdot \frac{10+j8}{41} \text{ V} - 2 \text{ V} = \frac{-14+j38-j82}{j41} \text{ V} \Rightarrow \underline{V}_1 = \left(-\frac{44}{41} + j\frac{14}{41} \right) \text{ V}.$$

Struja $\underline{I}_X$ se može izračunati pomoću Omovog zakona za impedansu vrednosti 1Ω :

$$\underline{I}_X = \frac{0 - \underline{V}_2}{1\Omega} = \left(-\frac{10}{41} - j\frac{8}{41} \right) \text{ A}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_X$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{I}_X = \left(-\frac{10}{41} - j\frac{8}{41} \right) \text{A} \rightarrow \underline{I}_X = \sqrt{\left(-\frac{10}{41} \right)^2 + \left(-\frac{8}{41} \right)^2} \text{A} \cdot e^{j \left(180^\circ + \arctg \left(\frac{-8}{-10} \right) \right)} = \frac{2}{\sqrt{41}} \text{A} \cdot e^{j218.66^\circ},$$

$$\underline{I}_X = \frac{2}{\sqrt{41}} \text{A} \angle 218.66^\circ \rightarrow i_X(t) = 2\sqrt{\frac{2}{41}} \text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 218.66^\circ),$$

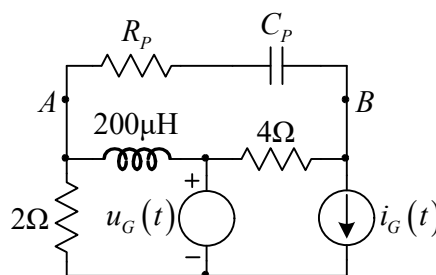
$$i_X(t) = 2\sqrt{\frac{2}{41}} \text{A} \cdot \cos(10000\pi t + 218.66^\circ).$$

2.14. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.14 je poznato: $u_G(t) = 8\text{V} \cdot \sin(\omega t - 45^\circ)$, $i_G(t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(\omega t)$ i $\omega = 10\text{krad/s}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola ispod tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti kompleksnu, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu koja se razvija na potrošaču koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kondenzatora kapacitivnosti C_p , za slučaj kada je $R_p = 1\Omega$ i $C_p = 33.33\mu\text{F}$. Odrediti i faktor snage potrošača u tom slučaju.

c) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti otpornost R_p i kapacitivnost C_p , tako da se na potrošaču koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kondenzatora kapacitivnosti C_p razvija maksimalna aktivna snaga.



Slika 2.14

Rešenje:

Impedanse otpornika iz dela kola sa slike 2.14 ispod tačaka A i B su:

$$\underline{Z}_{R_1} = 2\Omega \text{ i } \underline{Z}_{R_2} = 4\Omega.$$

Impedansa kalema induktivnosti $L = 200\mu\text{H}$ se može izračunati na sledeći način:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_L = j\omega \cdot 200\mu\text{H} = j \cdot 10\text{krad/s} \cdot 200\mu\text{H} = j2\Omega,$$

dok je impedansa potrošača koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kondenzatora kapacitivnosti C_p :

$$\underline{Z}_p = R_p + \frac{1}{j\omega C_p}.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = 8\text{V} \cdot \sin(\omega t - 45^\circ) = 8\text{V} \cdot \cos(90^\circ - (\omega t - 45^\circ)) = 8\text{V} \cdot \cos(135^\circ - \omega t) = 8\text{V} \cdot \cos(\omega t - 135^\circ)$$

$$u_G(t) = 8\text{V} \cdot \cos(\omega t - 135^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = 4\sqrt{2}\text{V} \angle -135^\circ \rightarrow \underline{U}_G = 4\sqrt{2}\text{V} \cdot e^{-j135^\circ},$$

$$\underline{U}_G = 4\sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos(-135^\circ) + j\sin(-135^\circ)) = 4\sqrt{2}\text{V} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \underline{U}_G = (-4 - j4)\text{V}.$$

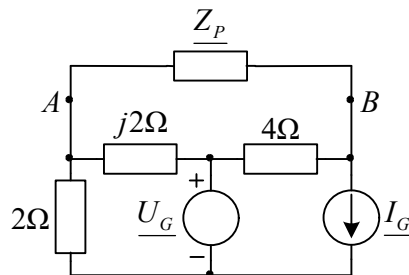
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(\omega t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - \omega t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ),$$

$$i_G(t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = -2\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_G = -2\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_G = -2\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j\sin(-90^\circ)) = -2\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_G = j2\text{A}.$$

Na slici 2.14a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:

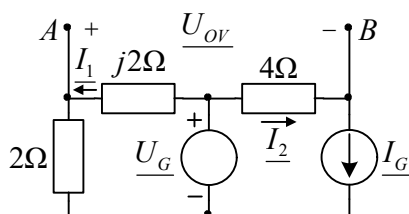


Slika 2.14a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola ispod tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola ispod tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.14b:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$



Slika 2.14b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.14b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = \underline{I}_2 \cdot 4\Omega - \underline{I}_1 \cdot j2\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_G = j2A,$$

dok je na osnovu Omovog zakona za rednu vezu impedansi $j2\Omega$ i 2Ω :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_G}{2\Omega + j2\Omega} = \frac{(-4 - j4)V}{(2 + j2)\Omega} = -2A,$$

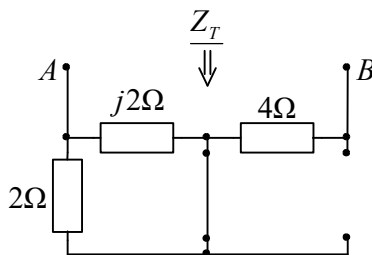
tako da se dobija da je:

$$\underline{U}_{OV} = j2A \cdot 4\Omega - (-2A) \cdot j2\Omega = j12V.$$

Dakle, konačno je:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = j12V.$$

Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.14c:

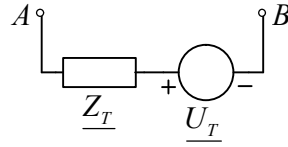


Slika 2.14c

$$\underline{Z}_T = (j2\Omega \parallel 2\Omega) + 4\Omega = \frac{j2\Omega \cdot 2\Omega}{j2\Omega + 2\Omega} + 4\Omega = \frac{j2}{1+j}\Omega + 4\Omega = (5+j)\Omega.$$

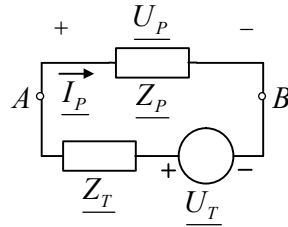
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.14b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.14d:



Slika 2.14d

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), kolo sa slike 2.14a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.14e:



Slika 2.14e

Za slučaj kada je $R_p = 1\Omega$ i $C_p = 33.33\mu\text{F}$, impedansa $\underline{Z}_p$ će imati sledeću vrednost:

$$\underline{Z}_p = R_p + \frac{1}{j\omega C_p} = 1\Omega + \frac{1}{j \cdot 10\text{krad/s} \cdot 33.33\mu\text{F}} = (1 - j3)\Omega.$$

Struja $\underline{I}_p$, označena na slici 2.14e, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_p$:

$$\underline{I}_p = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_p} = \frac{j12\text{V}}{(5 + j)\Omega + (1 - j3)\Omega} = \frac{j6}{3 - j}\text{A} = \left(-\frac{3}{5} + j\frac{9}{5}\right)\text{A}.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_p$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_p$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_p = \underline{U}_p \cdot \underline{I}_p^* = \underline{Z}_p \cdot \underline{I}_p \cdot \underline{I}_p^* = \underline{Z}_p \cdot |\underline{I}_p|^2 = (1 - j3)\Omega \cdot \left(\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2}\text{A}\right)^2 = \left(\frac{18}{5} - j\frac{54}{5}\right)\text{VA},$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_p$ razvija aktivna snaga:

$$P_p = \frac{18}{5}\text{W},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

reaktivna snaga:

$$Q_P = -\frac{54}{5} \text{ VAr},$$

i prividna snaga:

$$S_P = |S_P| = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(-\frac{54}{5}\right)^2} \text{ VA} = \frac{18\sqrt{10}}{5} \text{ VA}.$$

Faktor snage potrošača $\underline{Z}_P$ je:

$$\cos \phi = \frac{P_P}{S_P} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

c) Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.14e razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = (5 - j)\Omega.$$

Dakle, u tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R_P + \frac{1}{j\omega C_P} = R_P - \frac{j}{\omega C_P} = 5\Omega - j1\Omega,$$

odakle se dobija da je neophodno da bude:

$$R_P = 5\Omega,$$

kao i:

$$\frac{1}{\omega C_P} = 1\Omega \Rightarrow C_P = \frac{1}{\omega \cdot 1\Omega} = \frac{1}{10\text{krad/s} \cdot 1\Omega} \Rightarrow C_P = 100\mu\text{F}.$$

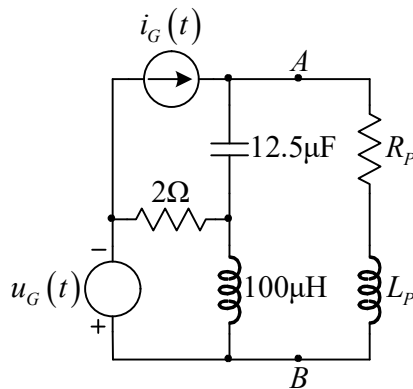
2.15. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.15 je poznato: $u_G(t) = 6\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(\omega t)$, $i_G(t) = -3\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(\omega t)$ i $\omega = 20\text{krad/s}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti kompleksnu, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu koja se razvija na potrošaču koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p , za slučaj kada je $R_p = 2\Omega$ i $L_p = 150\mu\text{H}$. Odrediti i faktor snage potrošača u tom slučaju.

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti otpornost R_p i induktivnost L_p , tako da se na potrošaču koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p razvija maksimalna aktivna snaga.



Slika 2.15

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.15 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 2\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 12.5\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega \cdot 12.5\mu\text{F}} = \frac{1}{j \cdot 20\text{krad/s} \cdot 12.5\mu\text{F}} = -j4\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 100\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j\omega \cdot 100\mu\text{H} = j \cdot 20\text{krad/s} \cdot 100\mu\text{H} = j2\Omega.$$

Impedansa potrošača koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p je:

$$\underline{Z}_p = R_p + j\omega L_p.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = 6\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(\omega t) = 6\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(90^\circ - \omega t) = 6\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ),$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$u_G(t) = 6\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = 6\text{V} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_G = 6\text{V} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{U}_G = 6\text{V} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = 6\text{V} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_G = -j6\text{V}.$$

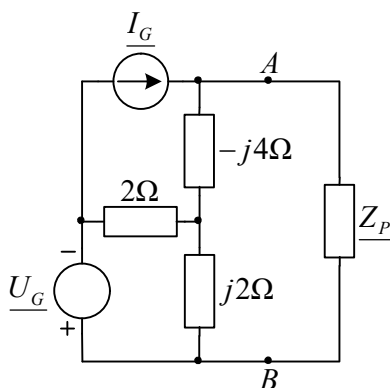
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = -3\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(\omega t) = -3\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - \omega t) = -3\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ),$$

$$i_G(t) = -3\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = -3\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_G = -3\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_G = -3\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -3\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_G = j3\text{A}.$$

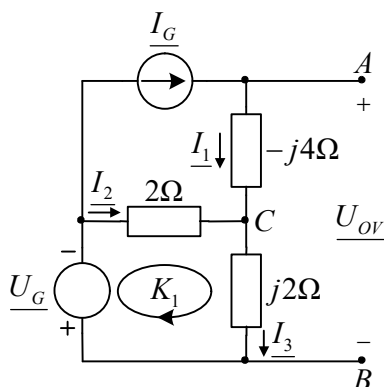
Na slici 2.15a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.15a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.15b:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$



Slika 2.15b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.15b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = \underline{I}_3 \cdot j2\Omega + \underline{I}_1 \cdot (-j4\Omega).$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_G = j3A,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 - \underline{I}_1 = \underline{I}_3 - j3A.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na impedansama vrednosti 2Ω i $j2\Omega$ izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$-\underline{U}_G - \underline{I}_2 \cdot 2\Omega - \underline{I}_3 \cdot j2\Omega = 0.$$

Uvrštavanjem izvedenog izraza za struju $\underline{I}_2$ u prethodnu jednačinu, sledi da je:

$$-\underline{U}_G - (\underline{I}_3 - j3A) \cdot 2\Omega - \underline{I}_3 \cdot j2\Omega = 0 \Rightarrow \underline{I}_3 \cdot (2 + j2)\Omega = -\underline{U}_G + j6V = j6V + j6V = j12V,$$

tako da je:

$$\underline{I}_3 = \frac{j12}{2 + j2} A = \frac{24 + j24}{8} A = (3 + j3) A.$$

Zamenom izračunatih vrednosti struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_3$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

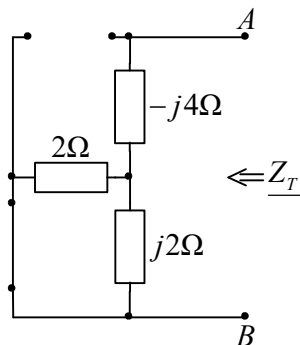
$$\underline{U}_{OV} = (3 + j3) A \cdot j2\Omega + j3A \cdot (-j4\Omega) = (6 + j6) V,$$

tako da je konačno:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = (6 + j6) \text{ V}.$$

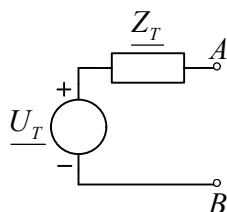
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.15c:



Slika 2.15c

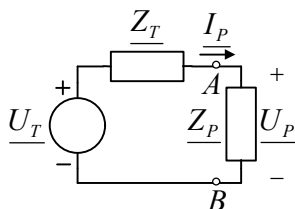
$$\underline{Z}_T = (j2\Omega \parallel 2\Omega) + (-j4\Omega) = \frac{j2\Omega \cdot 2\Omega}{j2\Omega + 2\Omega} - j4\Omega = \frac{j2}{1+j}\Omega - j4\Omega = (1 - j3)\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.15b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.15d:



Slika 2.15d

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, kolo sa slike 2.15a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.15e:



Slika 2.15e

Za slučaj kada je $R_P = 2\Omega$ i $L_P = 150\mu\text{H}$, impedansa $\underline{Z}_P$ će imati sledeću vrednost:

$$\underline{Z}_P = R_P + j\omega L_P = 2\Omega + j \cdot 20\text{krad/s} \cdot 150\mu\text{H} = (2 + j3)\Omega.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.15e, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{(6 + j6) \text{ V}}{(1 - j3)\Omega + (2 + j3)\Omega} = \frac{6 + j6}{3} \text{ A} = (2 + j2) \text{ A}.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = (2 + j3)\Omega \cdot \left(\sqrt{2^2 + 2^2} \text{ A}\right)^2 = (16 + j24) \text{ VA},$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = 16 \text{ W},$$

reaktivna snaga:

$$Q_P = 24 \text{ VAr},$$

i prividna snaga:

$$S_P = |\underline{S}_P| = \sqrt{16^2 + 24^2} \text{ VA} = 8\sqrt{13} \text{ VA}.$$

Faktor snage potrošača $\underline{Z}_P$ je:

$$\cos \phi = \frac{P_P}{S_P} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

c) Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.15e razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = (1 + j3)\Omega.$$

Dakle, u tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R_P + j\omega L_P = 1\Omega + j3\Omega,$$

odakle se dobija da je neophodno da bude:

$$R_P = 1\Omega,$$

kao i:

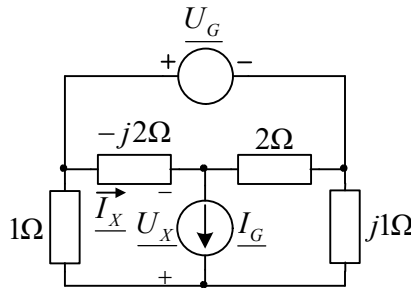
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\omega L_p = 3\Omega \Rightarrow L_p = \frac{3\Omega}{\omega} = \frac{3\Omega}{20\text{krad/s}} \Rightarrow L_p = 150\mu\text{H}.$$

2.16. Kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.16 radi na frekvenciji $f = 50\text{Hz}$, a poznato je i: $\underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V}\angle 45^\circ$ i $\underline{I}_G = 2\text{A}\angle 90^\circ$.

a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti napon $\underline{U}_X$ i struju $\underline{I}_X$ u kompleksnom domenu.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti napon $u_X(t)$ i struju $i_X(t)$ u vremenskom domenu.



Slika 2.16

Rešenje:

Napon idealnog naponskog generatora $\underline{U}_G$ se može predstaviti u vidu kompleksnog broja na sledeći način:

$$\underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V}\angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ},$$

$$\underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 5\sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_G = (5 + j5)\text{V}.$$

Struja idealnog strujnog generatora $\underline{I}_G$ se može predstaviti u vidu kompleksnog broja na sledeći način:

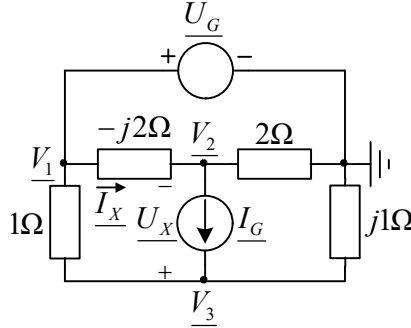
$$\underline{I}_G = 2\text{A}\angle 90^\circ \rightarrow \underline{I}_G = 2\text{A} \cdot e^{j90^\circ},$$

$$\underline{I}_G = 2\text{A} \cdot (\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = 2\text{A} \cdot (0 + j1) \Rightarrow \underline{I}_G = j2\text{A}.$$

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator $\underline{U}_G$), referentni čvor se ne može

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora $\underline{U}_G$.



Slika 2.16a

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 2.16a, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 2.16a, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = \underline{U}_G \\ \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{23}\underline{V}_3 = \underline{I}^{(2)} \\ \underline{Y}_{31}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{32}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{33}\underline{V}_3 = \underline{I}^{(3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{1}{-j2\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{-j2\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 - 0 \cdot \underline{V}_3 = -\underline{I}_G \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot \underline{V}_1 - 0 \cdot \underline{V}_2 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{j1\Omega} \right) \cdot \underline{V}_3 = \underline{I}_G \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (5 + j5) \text{ V} \\ \frac{1}{j2\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{-j2\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 = -j2\text{ A} \\ -\frac{1}{1\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{j1\Omega} \right) \cdot \underline{V}_3 = j2\text{ A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (5 + j5) \text{ V} \\ \frac{1}{j2} \cdot \underline{V}_1 + \frac{-1+j}{j2} \cdot \underline{V}_2 = -j2\text{ V} \\ -\underline{V}_1 + \frac{1+j}{j} \cdot \underline{V}_3 = j2\text{ V} \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (5 + j5) \text{ V} \\ \frac{1}{j2} \cdot (5 + j5) \text{ V} + \frac{-1+j}{j2} \cdot \underline{V}_2 = -j2\text{ V} \\ -(5 + j5) \text{ V} + \frac{1+j}{j} \cdot \underline{V}_3 = j2\text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (5 + j5) \text{ V} \\ \frac{-1+j}{j2} \cdot \underline{V}_2 = -j2\text{ V} - \frac{1}{j2} \cdot (5 + j5) \text{ V} \\ \underline{V}_3 = \frac{j(5 + j7)}{1+j} \text{ V} = \frac{-7 + j5}{1+j} \text{ V} \end{array} \right\},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (5 + j5) \text{ V} \\ \underline{V}_2 = \frac{-1 - j5}{-1 + j} \text{ V} \\ \underline{V}_3 = (-1 + j6) \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (5 + j5) \text{ V} \\ \underline{V}_2 = (-2 + j3) \text{ V} \\ \underline{V}_3 = (-1 + j6) \text{ V} \end{array} \right\}.$$

Napon $\underline{U}_X$ se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_X = \underline{V}_3 - \underline{V}_2 = (-1 + j6) \text{ V} - (-2 + j3) \text{ V} = (1 + j3) \text{ V}.$$

Struja $\underline{I}_X$ se može izračunati pomoću Omovog zakona za impedansu vrednosti $-j2\Omega$:

$$\underline{I}_X = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{-j2\Omega} = \frac{(5 + j5) \text{ V} - (-2 + j3) \text{ V}}{-j2\Omega} = \frac{7 + j2}{-j2} \text{ A} = \left(-1 + j\frac{7}{2}\right) \text{ A}.$$

b) Konverzijom napona $\underline{U}_X$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{U}_X = (1 + j3) \text{ V} \rightarrow \underline{U}_X = \sqrt{1^2 + 3^2} \text{ V} \cdot e^{j \arctg \frac{3}{1}} = \sqrt{10} \text{ V} \cdot e^{j71.57^\circ},$$

$$\underline{U}_X = \sqrt{10} \text{ V} \angle 71.57^\circ \rightarrow u_X(t) = 2\sqrt{5} \text{ V} \cdot \cos(2\pi ft + 71.57^\circ),$$

$$u_X(t) = 2\sqrt{5} \text{ V} \cdot \cos(100\pi t + 71.57^\circ).$$

Konverzijom struje $\underline{I}_X$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_X = \left(-1 + j\frac{7}{2}\right) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_X = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} \text{ A} \cdot e^{j \left(180^\circ + \arctg \frac{2}{(-1)}\right)} = \frac{\sqrt{53}}{2} \text{ A} \cdot e^{j105.95^\circ},$$

$$\underline{I}_X = \frac{\sqrt{53}}{2} \text{ A} \angle 105.95^\circ \rightarrow i_X(t) = \sqrt{\frac{53}{2}} \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft + 105.95^\circ),$$

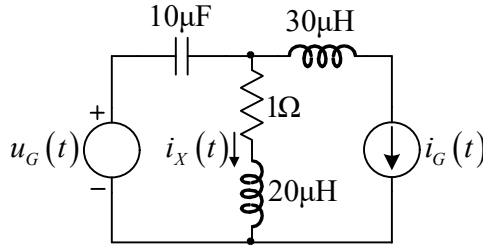
$$i_X(t) = \sqrt{\frac{53}{2}} \text{ A} \cdot \cos(100\pi t + 105.95^\circ).$$

2.17. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.17 je poznato: $u_G(t) = \sqrt{2} \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$, $i_G(t) = 2\sqrt{2} \text{ A} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$ i $\omega = 100 \text{ krad/s}$.

a) Primenom metoda superpozicije odrediti struju $\underline{I}_X$ u kompleksnom domenu.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti struju $i_x(t)$ u vremenskom domenu.

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti aktivnu i reaktivnu snagu koja se razvija na rednoj vezi otpornika otpornosti 1Ω i kalema induktivnosti $20\mu\text{H}$.



Slika 2.17

Rešenje:

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 10\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega \cdot 10\mu\text{F}} = \frac{1}{j \cdot 100\text{krad/s} \cdot 10\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 30\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j\omega \cdot 30\mu\text{H} = j \cdot 100\text{krad/s} \cdot 30\mu\text{H} = j3\Omega.$$

Impedansa redne veze otpornika otpornosti 1Ω i kalema induktivnosti $20\mu\text{H}$ je:

$$\underline{Z}_X = 1\Omega + j\omega \cdot 20\mu\text{H} = 1\Omega + j \cdot 100\text{krad/s} \cdot 20\mu\text{H} = (1 + j2)\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = \sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(\omega t) \rightarrow \underline{U}_G = 1\text{V} \angle 0^\circ \rightarrow \underline{U}_G = 1\text{V} \cdot e^{j0^\circ},$$

$$\underline{U}_G = 1\text{V} \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 1\text{V} \cdot (1 + j0) \Rightarrow \underline{U}_G = 1\text{V}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

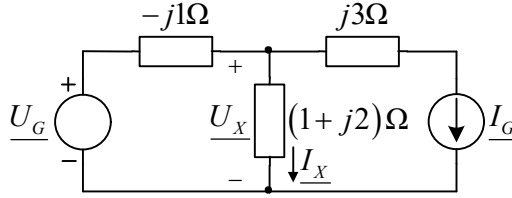
$$i_G(t) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(90^\circ - \omega t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(\omega t),$$

$$i_G(t) = -2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(\omega t) \rightarrow \underline{I}_G = -2\text{A} \angle 0^\circ \rightarrow \underline{I}_G = -2\text{A} \cdot e^{j0^\circ},$$

$$\underline{I}_G = -2\text{A} \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = -2\text{A} \cdot (1 + j0) \Rightarrow \underline{I}_G = -2\text{A}.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Na slici 2.17a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.17a

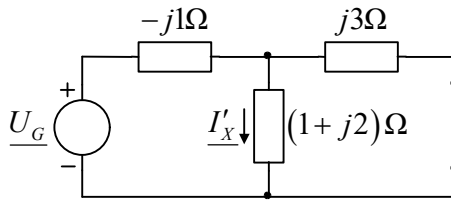
a) Struja $\underline{I}_X$ se može predstaviti kao zbir dve superpozicione komponente i to: komponente $\underline{I}'_X$ koja nastaje kada u kolu deluje idealni naponski generator $\underline{U}_G$, dok je idealni strujni generator $\underline{I}_G$ anuliran, i komponente $\underline{I}''_X$ koja nastaje kada u kolu deluje idealni strujni generator $\underline{I}_G$, dok je idealni naponski generator $\underline{U}_G$ anuliran:

$$\underline{I}_X = \underline{I}'_X + \underline{I}''_X,$$

$$\underline{I}'_X = \underline{I}_X (\underline{U}_G \neq 0, \underline{I}_G = 0),$$

$$\underline{I}''_X = \underline{I}_X (\underline{U}_G = 0, \underline{I}_G \neq 0).$$

Superpoziciona komponenta $\underline{I}'_X$ se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.17b (u kom je idealni strujni generator $\underline{I}_G$ anuliran tako što je zamenjen otvorenom vezom) primenom Omovog zakona za rednu vezu impedansi vrednosti $-j1\Omega$ i $(1+j2)\Omega$:

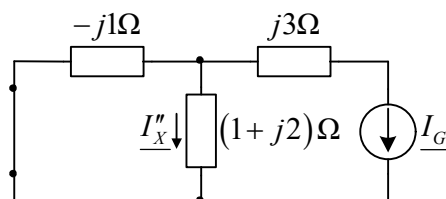


Slika 2.17b

$$\underline{I}'_X = \frac{\underline{U}_G}{-j1\Omega + (1+j2)\Omega} = \frac{1V}{1\Omega + j1\Omega} = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)A.$$

Superpoziciona komponenta $\underline{I}''_X$ se može odrediti na osnovu kola prikazanog na slici 2.17c (u kom je idealni naponski generator $\underline{U}_G$ anuliran tako što je zamenjen kratkim spojem) primenom formule za strujni razdelnik:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.17c

$$\underline{I}_X'' = -\frac{-j1\Omega}{-j1\Omega + (1+j2)\Omega} \cdot \underline{I}_G = \frac{j}{1+j} \cdot (-2A) = (-1-j)A.$$

Konačno, dobija se da je:

$$\underline{I}_X = \underline{I}_X' + \underline{I}_X'' = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)A + (-1-j)A = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{3}{2}\right)A.$$

b) Konverzijom struje $\underline{I}_X$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_X = \left(-\frac{1}{2} - j\frac{3}{2}\right)A \rightarrow \underline{I}_X = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} A \cdot e^{j\left(180^\circ + \arctg\left(\frac{-3/2}{-1/2}\right)\right)} = \frac{\sqrt{10}}{2} A \cdot e^{j251.57^\circ},$$

$$\underline{I}_X = \frac{\sqrt{10}}{2} A \angle 251.57^\circ \rightarrow i_X(t) = \sqrt{5}A \cdot \cos(\omega t + 251.57^\circ),$$

$$i_X(t) = \sqrt{5}A \cdot \cos(100000t + 251.57^\circ).$$

c) Kompleksna snaga koja se razvija na rednoj vezi otpornika otpornosti 1Ω i kalema induktivnosti $20\mu H$ (tj. na impedansi $\underline{Z}_X$) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_X = \underline{U}_X \cdot \underline{I}_X^* = \underline{Z}_X \cdot \underline{I}_X \cdot \underline{I}_X^* = \underline{Z}_X \cdot |\underline{I}_X|^2 = (1+j2)\Omega \cdot \left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} A\right)^2 = \left(\frac{5}{2} + j5\right)VA,$$

što znači da se na impedansi $\underline{Z}_X$ razvija aktivna snaga:

$$P_X = \frac{5}{2} W,$$

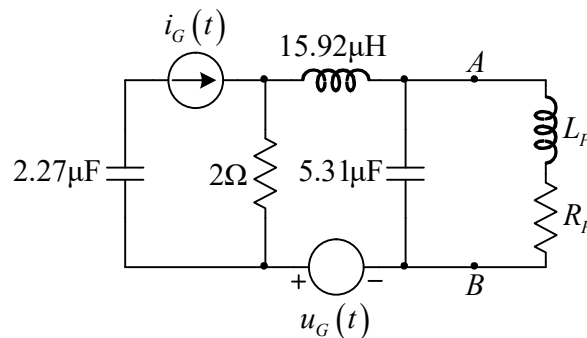
i reaktivna snaga:

$$Q_X = 5VAr.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

2.18. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.18 je poznato: $u_G(t) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_G(t) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$ i $f = 10\text{kHz}$.

- Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .
- Odrediti ekvivalentni Nortonov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .
- Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti otpornost R_p i induktivnost L_p , tako da se na potrošaču koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p razvija maksimalna aktivna snaga.
- Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, a pod uslovom iz tačke **c)**, odrediti kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu koja se razvija na potrošaču koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p .



Slika 2.18

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.18 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 2\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 2.27\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 2.27\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 2.27\mu\text{F}} = -j7\Omega,$$

impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_2 = 5.31\mu\text{F}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 5.31\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 5.31\mu\text{F}} = -j3\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 15.92\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j2\pi f \cdot 15.92\mu\text{H} = j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 15.92\mu\text{H} = j1\Omega.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Impedansa potrošača koji se sastoji od redne veze otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p je:

$$\underline{Z}_p = R_p + j2\pi fL_p.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$u_G(t) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = -2\text{V} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_G = -2\text{V} \cdot e^{-j90^\circ},$$

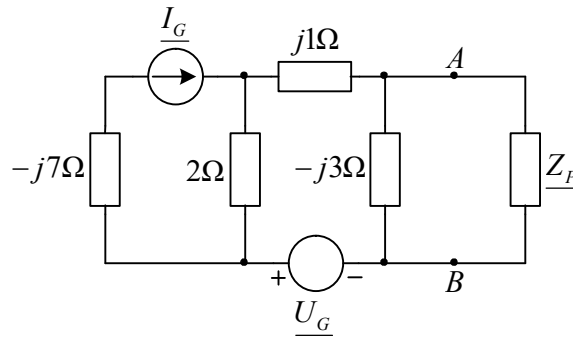
$$\underline{U}_G = -2\text{V} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -2\text{V} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_G = j2\text{V}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = \sqrt{2}\text{A} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{I}_G = \sqrt{2}\text{A} \cdot e^{j45^\circ},$$

$$\underline{I}_G = \sqrt{2}\text{A} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_G = (1 + j)\text{A}.$$

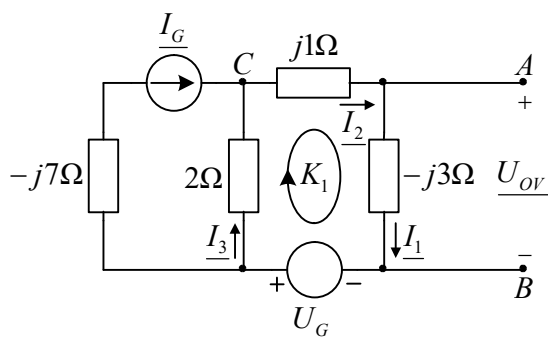
Na slici 2.18a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.18a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.18b:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{ov}.$$



Slika 2.18b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.18b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = \underline{I}_1 \cdot (-j3\Omega).$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 - \underline{I}_G = \underline{I}_1 - (1+j)\text{A}.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na impedansama vrednosti 2Ω , $j1\Omega$ i $-j3\Omega$ izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$\underline{U}_G - \underline{I}_3 \cdot 2\Omega - \underline{I}_2 \cdot j1\Omega - \underline{I}_1 \cdot (-j3)\Omega = 0.$$

Uvrštavanjem izvedenih izraza za struje $\underline{I}_2$ i $\underline{I}_3$ u prethodnu jednačinu, dobija se:

$$\underline{U}_G - (\underline{I}_1 - (1+j)\text{A}) \cdot 2\Omega - \underline{I}_1 \cdot j1\Omega - \underline{I}_1 \cdot (-j3)\Omega = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_G + (2+j2)\text{V}}{(2-j2)\Omega},$$

tako da je:

$$\underline{I}_1 = \frac{j2\text{V} + (2+j2)\text{V}}{(2-j2)\Omega} = \frac{1+j2}{1-j}\text{A} = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{3}{2}\right)\text{A}.$$

Zamenom izračunate vrednosti struje $\underline{I}_1$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

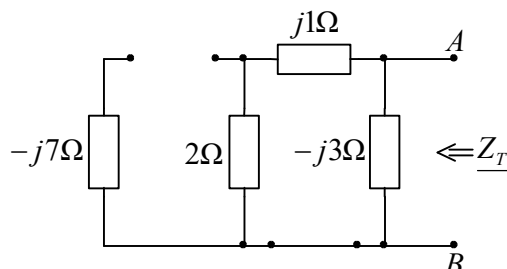
$$\underline{U}_{OV} = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{3}{2}\right)\text{A} \cdot (-j3\Omega) = \left(\frac{9}{2} + j\frac{3}{2}\right)\text{V},$$

tako da je konačno:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{ov} = \left(\frac{9}{2} + j\frac{3}{2} \right) \text{V}.$$

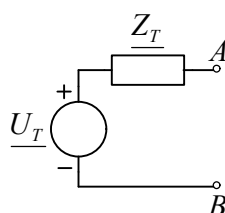
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.18c:



Slika 2.18c

$$\underline{Z}_T = (j1\Omega + 2\Omega) \parallel (-j3\Omega) = \frac{(2+j) \cdot (-j3)}{2+j+(-j3)} \Omega = \frac{3-j6}{2-j2} \Omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-j2}{1-j} \Omega = \left(\frac{9}{4} - j\frac{3}{4} \right) \Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{ov}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.18b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.18d:



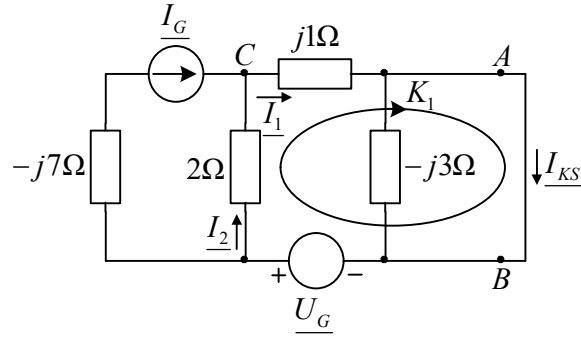
Slika 2.18d

b) Struja Nortonovog generatora $\underline{I}_N$ za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja $\underline{I}_{KS}$ između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 2.18e.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.18e

S obzirom da su tačke A i B kratko spojene, napon na impedansi vrednosti $-j3\Omega$ će biti jednak nuli, tako da se na osnovu Omovog zakona može zaključiti da kroz tu impedansu neće proticati struja. Imajući to u vidu, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A važi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{KS},$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 - \underline{I}_G = \underline{I}_{KS} - (1 + j)\text{A}.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na impedansama vrednosti 2Ω i $j1\Omega$ izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$\underline{U}_G - \underline{I}_2 \cdot 2\Omega - \underline{I}_1 \cdot j1\Omega = 0.$$

Uvrštavanjem izvedenih izraza za struje $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ u prethodnu jednačinu, dobija se:

$$\underline{U}_G - (\underline{I}_{KS} - (1 + j)\text{A}) \cdot 2\Omega - \underline{I}_{KS} \cdot j1\Omega = 0 \Rightarrow \underline{I}_{KS} = \frac{\underline{U}_G + (2 + j2)\text{V}}{(2 + j1)\Omega},$$

iz čega sledi:

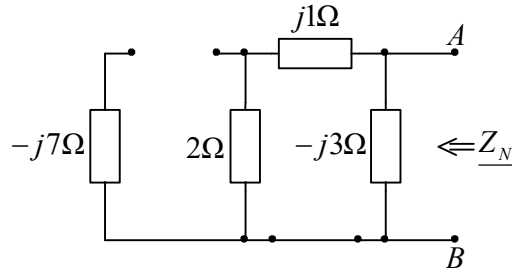
$$\underline{I}_{KS} = \frac{j2\text{V} + (2 + j2)\text{V}}{(2 + j1)\Omega} = \frac{2 + j4}{2 + j}\text{A} = \left(\frac{8}{5} + j\frac{6}{5}\right)\text{A},$$

tako da je konačno:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{KS} = \left(\frac{8}{5} + j\frac{6}{5}\right)\text{A}.$$

Impedansa Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.18f:

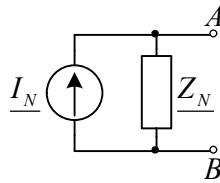
2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.18f

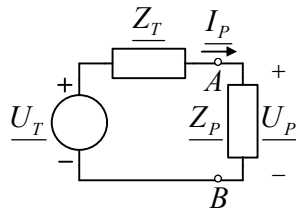
$$\underline{Z}_N = (j1\Omega + 2\Omega) \parallel (-j3\Omega) = \frac{(2+j) \cdot (-j3)}{2+j+(-j3)} \Omega = \frac{3-j6}{2-j2} \Omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-j2}{1-j} \Omega = \left(\frac{9}{4} - j\frac{3}{4} \right) \Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja $\underline{I}_{KS}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.18e), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 2.18g:



Slika 2.18g

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), kolo sa slike 2.18a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.18h:



Slika 2.18h

Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.18h razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = \left(\frac{9}{4} + j\frac{3}{4} \right) \Omega.$$

Dakle, u tom slučaju mora da važi:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_P = R_P + j2\pi fL_P = \frac{9}{4}\Omega + j\frac{3}{4}\Omega,$$

odakle se dobija da je neophodno da bude:

$$R_P = \frac{9}{4}\Omega,$$

kao i:

$$2\pi fL_P = \frac{3}{4}\Omega \Rightarrow L_P = \frac{3\Omega}{4 \cdot 2\pi f} = \frac{3\Omega}{4 \cdot 2\pi \cdot 10\text{kHz}} \Rightarrow L_P = 11.94\mu\text{H}.$$

d) Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.18h, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{\left(\frac{9}{2} + j\frac{3}{2}\right)\text{V}}{\left(\frac{9}{4} - j\frac{3}{4}\right)\Omega + \left(\frac{9}{4} + j\frac{3}{4}\right)\Omega} = \frac{\frac{9}{2} + j\frac{3}{2}}{\frac{9}{2}}\text{A} = \left(1 + j\frac{1}{3}\right)\text{A}.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = \left(\frac{9}{4} + j\frac{3}{4}\right)\Omega \cdot \left(\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}\text{A}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} + j\frac{5}{6}\right)\text{VA},$$

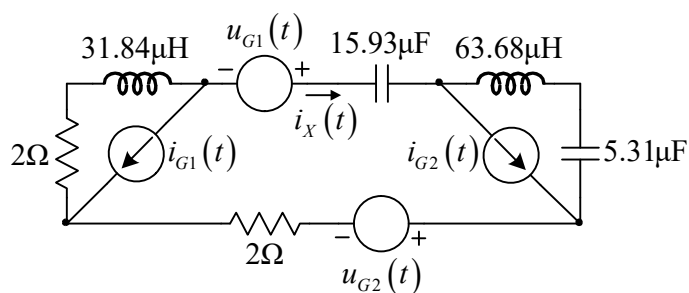
što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = \frac{5}{2}\text{W},$$

i reaktivna snaga:

$$Q_P = \frac{5}{6}\text{VAr}.$$

2.19. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.19 je poznato: $u_{G1}(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $u_{G2}(t) = 3\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft)$, $i_{G1}(t) = 2\text{A} \cdot \sin(2\pi ft - 135^\circ)$, $i_{G2}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 10\text{kHz}$. Primenom metoda transformacije izvora odrediti struju $i_X(t)$.



Slika 2.19

Rešenje:

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 15.93\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 15.93\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 15.93\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

dok je impedansa otpornika koji je redno vezan sa idealnim naponskim generatorom $u_{G_2}(t)$:

$$\underline{Z}_{R_1} = 2\Omega.$$

Impedansa redne veze otpornika otpornosti 2Ω i kalema induktivnosti $31.84\mu\text{H}$ je:

$$\underline{Z}_1 = 2\Omega + j2\pi f \cdot 31.84\mu\text{H} = 2\Omega + j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 31.84\mu\text{H} = (2 + j2)\Omega,$$

dok je impedansa redne veze kalema induktivnosti $63.68\mu\text{H}$ i kondenzatora kapacitivnosti $5.31\mu\text{F}$:

$$\underline{Z}_2 = j2\pi f \cdot 63.68\mu\text{H} + \frac{1}{j2\pi f \cdot 5.31\mu\text{F}} = j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 63.68\mu\text{H} + \frac{1}{j2\pi \cdot 10\text{kHz} \cdot 5.31\mu\text{F}} = j1\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G_1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_{G_1}(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G_1} = \sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_{G_1} = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ},$$

$$\underline{U}_{G_1} = \sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_{G_1} = (1 + j)\text{V}.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G_2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_{G_2}(t) = 3\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft) \rightarrow \underline{U}_{G_2} = 3\text{V} \angle 0^\circ \rightarrow \underline{U}_{G_2} = 3\text{V} \cdot e^{j0^\circ},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_{G2} = 3V \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 3V \cdot (1 + j0) \Rightarrow \underline{U}_{G2} = 3V.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G1}(t) = 2A \cdot \sin(2\pi ft - 135^\circ) = 2A \cdot \cos(90^\circ - (2\pi ft - 135^\circ)) = 2A \cdot \cos(225^\circ - 2\pi ft),$$

$$i_{G1}(t) = 2A \cdot \cos(225^\circ - 2\pi ft) = 2A \cdot \cos(2\pi ft - 225^\circ) = -2A \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ),$$

$$i_{G1}(t) = -2A \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = -\sqrt{2}A \angle -45^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = -\sqrt{2}A \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{I}_{G1} = -\sqrt{2}A \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = -\sqrt{2}A \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = (-1 + j)A.$$

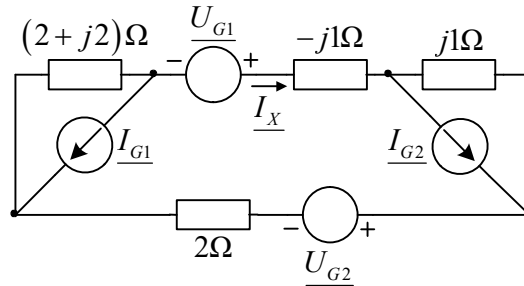
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G2}(t) = -\sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_{G2}(t) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G2} = -1A \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_{G2} = -1A \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_{G2} = -1A \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1A \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_{G2} = j1A.$$

Na slici 2.19a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.19a

U kolu sa slike 2.19a se paralelna veza idealnog strujnog generatora $\underline{I}_{G1}$ i impedanse vrednosti $(2 + j2)\Omega$, primenom metoda transformacije izvora, može transformisati u rednu vezu idealnog naponskog generatora napona:

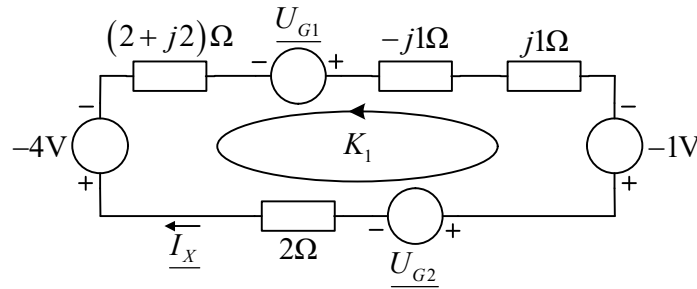
$$\underline{I}_{G1} \cdot (2 + j2)\Omega = (-1 + j)A \cdot (2 + j2)\Omega = -4V$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

i impedanse vrednosti $(2 + j2)\Omega$. Takođe, i paralelna veza idealnog strujnog generatora $\underline{I}_{G2}$ i impedanse vrednosti $j1\Omega$ se, primenom metoda transformacije izvora, može transformisati u rednu vezu idealnog naponskog generatora napona:

$$\underline{I}_{G2} \cdot j1\Omega = j1\text{A} \cdot j1\Omega = -1\text{V}$$

i impedanse vrednosti $j1\Omega$. Na taj način se dobija kolo prikazano na slici 2.19b, koje je potpuno ekvivalentno kolu sa slike 2.19a.



Slika 2.19b

Za kolo sa slike 2.19b se može napisati jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici 2.19b) u kojoj su naponi na odgovarajućim impedansama izraženi preko Omovog zakona:

$$(-4\text{V}) + \underline{I}_X \cdot 2\Omega + \underline{U}_{G2} - (-1\text{V}) + \underline{I}_X \cdot j1\Omega + \underline{I}_X \cdot (-j1\Omega) - \underline{U}_{G1} + \underline{I}_X \cdot (2 + j2)\Omega = 0,$$

odakle se dobija da je:

$$\underline{I}_X = \frac{-(-4\text{V}) - \underline{U}_{G2} + (-1\text{V}) + \underline{U}_{G1}}{2\Omega + j1\Omega + (-j1\Omega) + (2 + j2)\Omega} = \frac{4\text{V} - 3\text{V} - 1\text{V} + (1 + j)\text{V}}{(4 + j2)\Omega} = \frac{1 + j}{4 + j2}\text{A} = \left(\frac{3}{10} + j\frac{1}{10}\right)\text{A}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_X$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_X = \left(\frac{3}{10} + j\frac{1}{10}\right)\text{A} \rightarrow \underline{I}_X = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} \text{A} \cdot e^{j \arctan \frac{1}{3} \frac{10}{3}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{A} \cdot e^{j18.43^\circ},$$

$$\underline{I}_X = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{A} \angle 18.43^\circ \rightarrow i_X(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 18.43^\circ),$$

$$i_X(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{A} \cdot \cos(20000\pi t + 18.43^\circ).$$

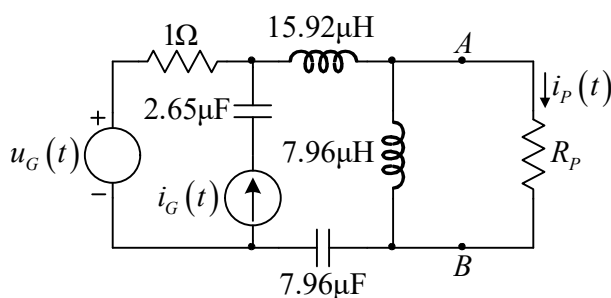
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

2.20. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.20 je poznato: $u_G(t) = 2V \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ)$, $i_G(t) = -\sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft)$, $f = 20\text{kHz}$ i $R_p = 0.2\Omega$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu koja se razvija na potrošaču otpornosti R_p .

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti struju $i_p(t)$.



Slika 2.20

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.20 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 1\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 2.65\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 2.65\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 2.65\mu\text{F}} = -j3\Omega,$$

impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_2 = 7.96\mu\text{F}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 7.96\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 7.96\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L_1 = 15.92\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_{L_1} = j2\pi f \cdot 15.92\mu\text{H} = j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 15.92\mu\text{H} = j2\Omega,$$

a impedansa kalema induktivnosti $L_2 = 7.96\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_{L_2} = j2\pi f \cdot 7.96\mu\text{H} = j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 7.96\mu\text{H} = j1\Omega.$$

Impedansa potrošača otpornosti R_p je:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_P = R_P = 0.2\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = 2V \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}V \angle -45^\circ \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}V \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{U}_G = \sqrt{2}V \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}V \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_G = (1 - j)V.$$

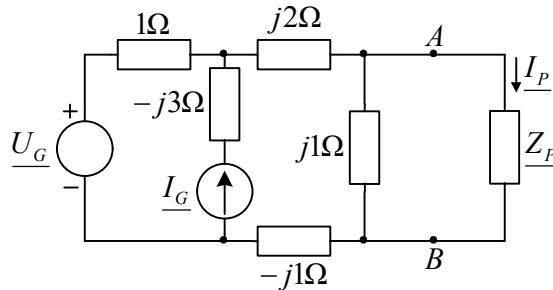
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = -\sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_G(t) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = -1A \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_G = -1A \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_G = -1A \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1A \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_G = j1A.$$

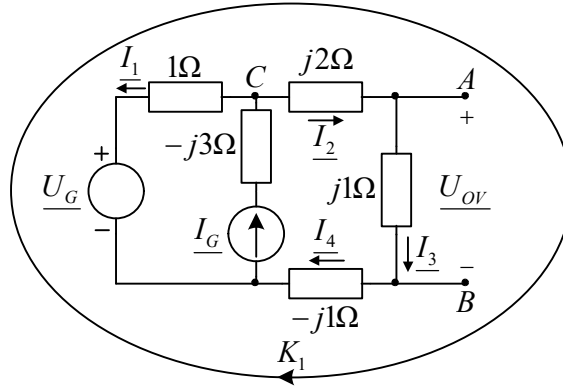
Na slici 2.20a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.20a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.20b:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$



Slika 2.20b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.20b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = \underline{I}_3 \cdot j1\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3,$$

na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B važi:

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_3,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_G - \underline{I}_2 = \underline{I}_G - \underline{I}_3 = j1\text{A} - \underline{I}_3.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za petlju K_1 (za smer obilaska petlje označen na slici), u kojoj su naponi na impedansama vrednosti 1Ω , $j2\Omega$, $j1\Omega$ i $-j1\Omega$ izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$\underline{U}_G + \underline{I}_1 \cdot 1\Omega - \underline{I}_2 \cdot j2\Omega - \underline{I}_3 \cdot j1\Omega - \underline{I}_4 \cdot (-j1\Omega) = 0.$$

Uvrštavanjem izvedenih izraza za struje $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ i $\underline{I}_4$ u prethodnu jednačinu, dobija se:

$$\underline{U}_G + (j1\text{A} - \underline{I}_3) \cdot 1\Omega - \underline{I}_3 \cdot j2\Omega - \underline{I}_3 \cdot j1\Omega - \underline{I}_3 \cdot (-j1\Omega) = 0 \Rightarrow \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_G + j1\text{V}}{(1 + j2)\Omega},$$

tako da je:

$$\underline{I}_3 = \frac{(1 - j)\text{V} + j1\text{V}}{(1 + j2)\Omega} = \frac{1}{1 + j2}\text{A} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right)\text{A}.$$

Zamenom izračunate vrednosti struje $\underline{I}_3$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

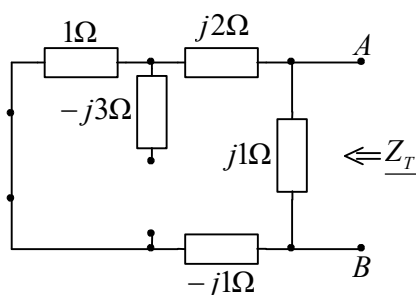
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_{ov} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5} \right) \text{A} \cdot j1\Omega = \left(\frac{2}{5} + j\frac{1}{5} \right) \text{V},$$

tako da je konačno:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{ov} = \left(\frac{2}{5} + j\frac{1}{5} \right) \text{V}.$$

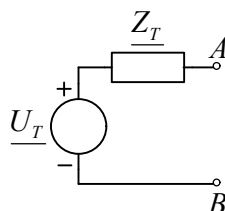
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.20c:



Slika 2.20c

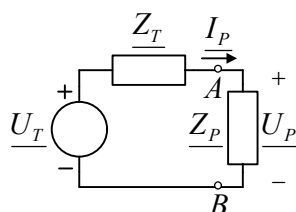
$$\underline{Z}_T = (j2\Omega + 1\Omega + (-j1\Omega)) \parallel j1\Omega = \frac{(1+j) \cdot j}{(1+j) + j} \Omega = \frac{-1+j}{1+j2} \Omega = \left(\frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right) \Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{ov}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.20b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.20d:



Slika 2.20d

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, kolo sa slike 2.20a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.20e:



Slika 2.20e

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.20e, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{\left(\frac{2}{5} + j\frac{1}{5}\right)V}{\left(\frac{1}{5} + j\frac{3}{5}\right)\Omega + \frac{1}{5}\Omega} = \frac{\frac{2}{5} + j\frac{1}{5}}{\frac{2}{5} + j\frac{3}{5}}A = \frac{2+j}{2+j3}A = \left(\frac{7}{13} - j\frac{4}{13}\right)A.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = \frac{1}{5}\Omega \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2 + \left(-\frac{4}{13}\right)^2} A \right)^2 = \left(\frac{1}{13} + j0\right)VA,$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = \frac{1}{13}W,$$

i reaktivna snaga:

$$Q_P = 0.$$

c) Konverzijom struje $\underline{I}_P$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_P = \left(\frac{7}{13} - j\frac{4}{13}\right)A \rightarrow \underline{I}_P = \sqrt{\left(\frac{7}{13}\right)^2 + \left(-\frac{4}{13}\right)^2} A \cdot e^{j \arctg\left(\frac{-4}{7}\right)} = \sqrt{\frac{5}{13}} A \cdot e^{-j29.74^\circ},$$

$$\underline{I}_P = \sqrt{\frac{5}{13}} A \angle -29.74^\circ \rightarrow i_P(t) = \sqrt{\frac{10}{13}} A \cdot \cos(2\pi ft - 29.74^\circ),$$

$$i_P(t) = \sqrt{\frac{10}{13}} A \cdot \cos(40000\pi t - 29.74^\circ).$$

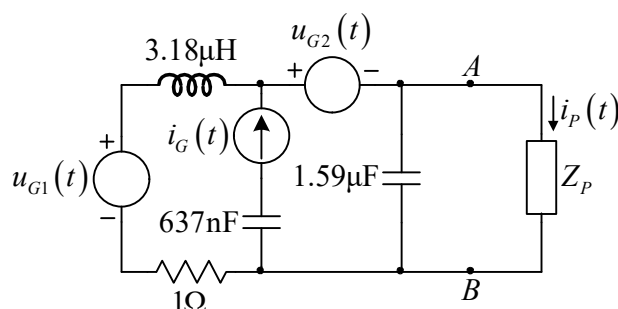
2.21. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.21 je poznato: $u_{G1}(t) = 2V \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $u_{G2}(t) = -2\sqrt{2}V \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_G(t) = \sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 50\text{kHz}$.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B . Tom prilikom, napon Tevenenovog generatora odrediti primenom metoda potencijala čvorova.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti kompleksnu, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu koja se razvija na potrošaču Z_p , ako je potrošač kalem induktivnosti $L_p = 6.37\mu\text{H}$.

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti kompleksnu, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu koja se razvija na potrošaču Z_p , ako je impedansa potrošača $\underline{Z}_p = (3 + j2)\Omega$. Odrediti i struju $i_p(t)$ u tom slučaju.



Slika 2.21

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.21 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 1\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 637\text{nF}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 637\text{nF}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 637\text{nF}} = -j5\Omega,$$

impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_2 = 1.59\mu\text{F}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 1.59\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 1.59\mu\text{F}} = -j2\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 3.18\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j2\pi f \cdot 3.18\mu\text{H} = j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 3.18\mu\text{H} = j1\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_{G1}(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G1} = \sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_{G1} = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_{G1} = \sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_{G1} = (1 + j)\text{V}.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_{G2}(t) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$u_{G2}(t) = -2\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G2} = -2\text{V} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_{G2} = -2\text{V} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{U}_{G2} = -2\text{V} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -2\text{V} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_{G2} = j2\text{V}.$$

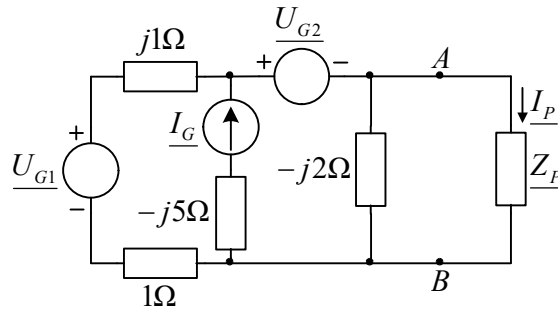
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_G(t) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = 1\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_G = 1\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_G = 1\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = 1\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_G = -j1\text{A}.$$

Na slici 2.21a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:

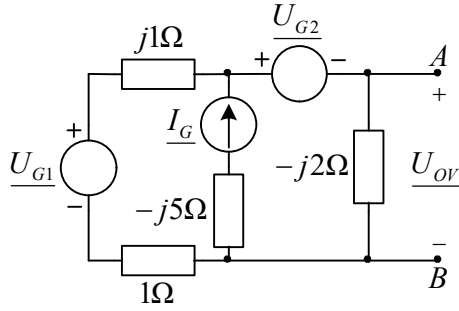


Slika 2.21a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.21b:

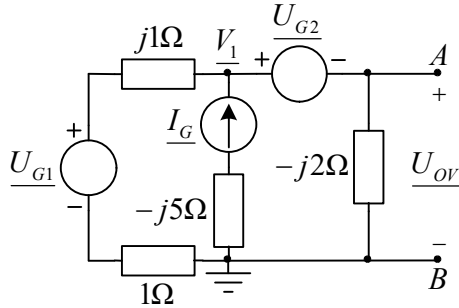
$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.21b

S obzirom da u kolu sa slike 2.21b ne postoji nijedan idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora, referentni čvor se može proizvoljno izabrati.



Slika 2.21c

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 2.21c, i ukoliko se potencijal preostalog čvora označi na način prikazan na slici 2.21c, po metodu potencijala čvorova se za to kolo može napisati sledeća jednačina:

$$\underline{Y}_{11}\underline{V}_1 = \underline{I}^{(1)} \Rightarrow \left(\frac{1}{(1+j)\Omega} + \frac{1}{-j2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_1 = \frac{\underline{U}_{G1}}{(1+j)\Omega} + \frac{\underline{U}_{G2}}{-j2\Omega} + \underline{I}_G.$$

Rešavanjem ove jednačine se dobija:

$$\left(\frac{1}{(1+j)\Omega} + \frac{1}{-j2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_1 = \frac{(1+j)V}{(1+j)\Omega} + \frac{j2V}{-j2\Omega} + (-j1A) \Rightarrow \left(\frac{1-j}{2} + \frac{j}{2} \right) \cdot \underline{V}_1 = -j1V,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \underline{V}_1 = -j1V \Rightarrow \underline{V}_1 = -j2V.$$

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.21c, može odrediti na sledeći način:

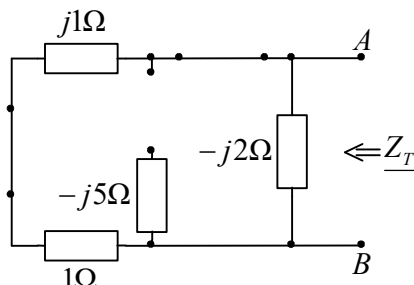
$$\underline{U}_{OV} = \underline{V}_1 - \underline{U}_{G2} = -j2V - j2V = -j4V,$$

tako da je konačno:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = -j4\text{V}.$$

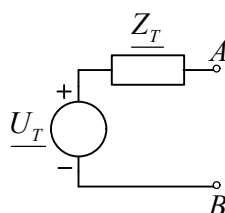
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.21d:



Slika 2.21d

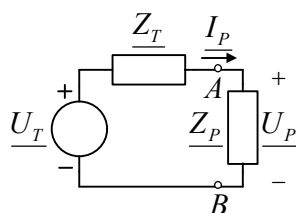
$$\underline{Z}_T = (j1\Omega + 1\Omega) \parallel (-j2\Omega) = \frac{(1+j) \cdot (-j2)}{(1+j) + (-j2)} \Omega = \frac{2-j2}{1-j} \Omega = 2\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.21b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.21e:



Slika 2.21e

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, kolo sa slike 2.21a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.21f:



Slika 2.21f

Po uslovu ove tačke zadatka, impedansa potrošača je:

$$\underline{Z}_P = j2\pi fL_P = j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 6.37\mu\text{H} = j2\Omega.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.21f, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{-j4V}{2\Omega + j2\Omega} = \frac{-j2}{1+j} A = (-1-j) A.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = j2\Omega \cdot \left(\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} A \right)^2 = (0 + j4) VA,$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = 0,$$

reaktivna snaga:

$$Q_P = 4VAr,$$

i prividna snaga:

$$S_P = |\underline{S}_P| = \sqrt{0^2 + 4^2} VA = 4VA.$$

c) Po uslovu ove tačke zadatka, impedansa potrošača je $\underline{Z}_P = (3 + j2)\Omega$.

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.21f, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{-j4V}{2\Omega + (3 + j2)\Omega} = \frac{-j4}{5 + j2} A = \left(-\frac{8}{29} - j\frac{20}{29} \right) A.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = (3 + j2)\Omega \cdot \left(\sqrt{\left(-\frac{8}{29} \right)^2 + \left(-\frac{20}{29} \right)^2} A \right)^2,$$

$$\underline{S}_P = (1.655 + j1.103) VA,$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = 1.655W,$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

reaktivna snaga:

$$Q_P = 1.103 \text{ VAr},$$

i prividna snaga:

$$S_P = |S_P| = \sqrt{1.655^2 + 1.103^2} \text{ VA} = 1.989 \text{ VA}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_P$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_P = \left(-\frac{8}{29} - j\frac{20}{29} \right) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_P = \sqrt{\left(-\frac{8}{29} \right)^2 + \left(-\frac{20}{29} \right)^2} \text{ A} \cdot e^{j \left(180^\circ + \arctg \left(\frac{-\frac{20}{29}}{-\frac{8}{29}} \right) \right)} = 0.743 \text{ A} \cdot e^{j248.2^\circ},$$

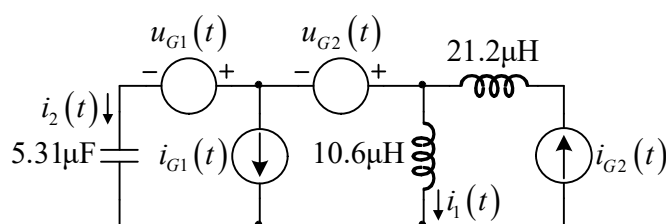
$$\underline{I}_P = 0.743 \text{ A} \angle 248.2^\circ \rightarrow i_P(t) = 1.05 \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft + 248.2^\circ),$$

$$i_P(t) = 1.05 \text{ A} \cdot \cos(100000\pi t + 248.2^\circ).$$

2.22. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.22 je poznato: $u_{G1}(t) = -\sqrt{2} \text{ V} \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_{G2}(t) = 4 \text{ V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $i_{G1}(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ)$, $i_{G2}(t) = 2\sqrt{2} \text{ A} \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 30 \text{ kHz}$.

a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu u kompleksnom domenu.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti struje $i_1(t)$ i $i_2(t)$ u vremenskom domenu.



Slika 2.22

Rešenje:

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 5.31 \mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot 5.31 \mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 30 \text{ kHz} \cdot 5.31 \mu\text{F}} = -j1 \Omega,$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

impedansa kalema induktivnosti $L_1 = 10.6\mu\text{H}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{L_1} = j2\pi f \cdot 10.6\mu\text{H} = j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 10.6\mu\text{H} = j2\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L_2 = 21.2\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_{L_2} = j2\pi f \cdot 21.2\mu\text{H} = j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 21.2\mu\text{H} = j4\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$\begin{aligned} u_{G1}(t) &= -\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ), \\ u_{G1}(t) &= -\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G1} = -1\text{V} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_{G1} = -1\text{V} \cdot e^{-j90^\circ}, \\ \underline{U}_{G1} &= -1\text{V} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1\text{V} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_{G1} = j1\text{V}. \end{aligned}$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$\begin{aligned} u_{G2}(t) &= 4\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G2} = 2\sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_{G2} = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ}, \\ \underline{U}_{G2} &= 2\sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 2\sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_{G2} = (2 + j2)\text{V}. \end{aligned}$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

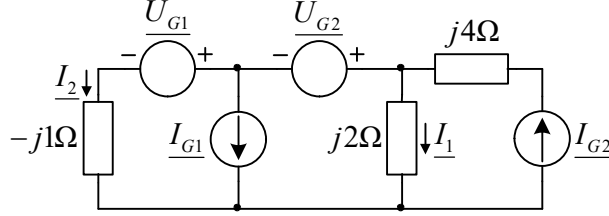
$$\begin{aligned} i_{G1}(t) &= 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \angle -45^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \cdot e^{-j45^\circ}, \\ \underline{I}_{G1} &= \sqrt{2}\text{A} \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = (1 - j)\text{A}. \end{aligned}$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$\begin{aligned} i_{G2}(t) &= 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ), \\ i_{G2}(t) &= 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G2} = 2\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_{G2} = 2\text{A} \cdot e^{-j90^\circ}, \\ \underline{I}_{G2} &= 2\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = 2\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_{G2} = -j2\text{A}. \end{aligned}$$

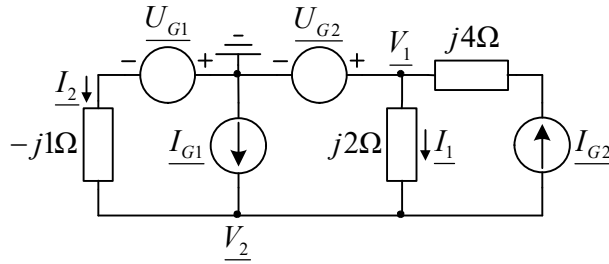
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Na slici 2.22a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.22a

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator $\underline{U}_{G2}$), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora $\underline{U}_{G2}$.



Slika 2.22b

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 2.22b, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 2.22b, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = \underline{U}_{G2} \\ \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 = \underline{I}^{(2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = \underline{U}_{G2} \\ -\frac{1}{j2\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{-j1\Omega} + \frac{1}{j2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 = -\frac{\underline{U}_{G1}}{-j1\Omega} + \underline{I}_{G1} - \underline{I}_{G2} \end{array} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (2 + j2) \text{ V} \\ -\frac{1}{j2\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{-j1\Omega} + \frac{1}{j2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 = -\frac{j1\text{ V}}{-j1\Omega} + (1 - j) \text{ A} - (-j2\text{ A}) \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (2 + j2) \text{ V} \\ -\frac{1}{j2\Omega} \cdot (2 + j2) \text{ V} + \left(-\frac{1}{j2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 = (2 + j) \text{ A} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (2 + j2) \text{ V} \\ -\frac{1}{j2} \cdot \underline{V}_2 = (2 + j) \text{ V} + \frac{1 + j}{j} \text{ V} \end{array} \right\},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (2 + j2) \text{ V} \\ -\frac{1}{j2} \cdot \underline{V}_2 = 3 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (2 + j2) \text{ V} \\ \underline{V}_2 = -j6 \text{ V} \end{array} \right\}.$$

b) Struja $\underline{I}_1$ se može izračunati pomoću Omovog zakona za impedansu vrednosti $j2\Omega$:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{j2\Omega} = \frac{(2 + j2)\text{V} - (-j6\text{V})}{j2\Omega} = \frac{1 + j4}{j} \text{ A} = (4 - j) \text{ A}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_1$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_1 = (4 - j) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_1 = \sqrt{4^2 + (-1)^2} \text{ A} \cdot e^{j \arctg \frac{(-1)}{4}} = \sqrt{17} \text{ A} \cdot e^{-j14.04^\circ},$$

$$\underline{I}_1 = \sqrt{17} \text{ A} \angle -14.04^\circ \rightarrow i_1(t) = \sqrt{34} \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft - 14.04^\circ),$$

$$i_1(t) = \sqrt{34} \text{ A} \cdot \cos(60000\pi t - 14.04^\circ).$$

Struja $\underline{I}_2$ se može odrediti pomoću Omovog zakona za impedansu vrednosti $-j1\Omega$:

$$\underline{I}_2 = \frac{(0 - \underline{U}_{G1}) - \underline{V}_2}{-j1\Omega} = \frac{(0 - j1\text{V}) - (-j6\text{V})}{-j1\Omega} = \frac{j5}{-j} \text{ A} = -5 \text{ A}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_2$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_2 = -5 \text{ A} \rightarrow \underline{I}_2 = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} \text{ A} \cdot e^{j \left(180^\circ + \arctg \frac{0}{(-5)} \right)} = 5 \text{ A} \cdot e^{j180^\circ},$$

$$\underline{I}_2 = 5 \text{ A} \angle 180^\circ \rightarrow i_2(t) = 5\sqrt{2} \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft + 180^\circ) = -5\sqrt{2} \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft),$$

$$i_2(t) = -5\sqrt{2} \text{ A} \cdot \cos(60000\pi t).$$

2.23. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.23 je poznato:
 $u_{G1}(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $u_{G2}(t) = -2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_{G1}(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ)$,
 $i_{G2}(t) = -\sqrt{2} \text{ A} \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 50 \text{ kHz}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B.

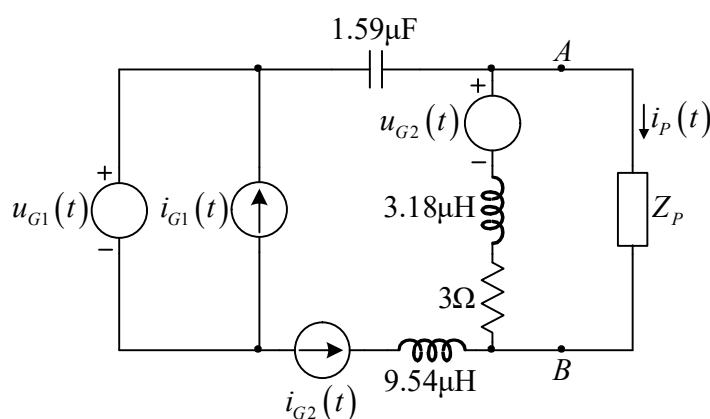
b) Odrediti ekvivalentni Nortonov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), odrediti impedansu $\underline{Z}_P$ potrošača, tako da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga. Realizovati dobijenu vrednost impedanse $\underline{Z}_P$ potrošača pomoću minimalnog potrebnog broja proizvoljnih komponenti (otpornika, kalemova, kondenzatora) i odrediti njihove vrednosti.

d) Korišćenjem rezultata iz tačke a), a pod uslovom iz tačke c), odrediti kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu koja se razvija na potrošaču.

e) Korišćenjem rezultata iz tačke a), a pod uslovom iz tačke c), odrediti struju $i_P(t)$.



Slika 2.23

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.23 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 3\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 1.59\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot 1.59\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 1.59\mu\text{F}} = -j2\Omega,$$

impedansa kalema induktivnosti $L_1 = 3.18\mu\text{H}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{L_1} = j2\pi f \cdot 3.18\mu\text{H} = j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 3.18\mu\text{H} = j1\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L_2 = 9.54\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_{L_2} = j2\pi f \cdot 9.54\mu\text{H} = j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 9.54\mu\text{H} = j3\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_{G1}(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G1} = \sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_{G1} = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ},$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_{G1} = \sqrt{2}V \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}V \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_{G1} = (1 + j)V.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_{G2}(t) = -2\sqrt{2}V \cdot \sin(2\pi ft) = -2\sqrt{2}V \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -2\sqrt{2}V \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$u_{G2}(t) = -2\sqrt{2}V \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_{G2} = -2V \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_{G2} = -2V \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{U}_{G2} = -2V \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -2V \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_{G2} = j2V.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G1}(t) = 2A \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}A \angle -45^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}A \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{I}_{G1} = \sqrt{2}A \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}A \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = (1 - j)A.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

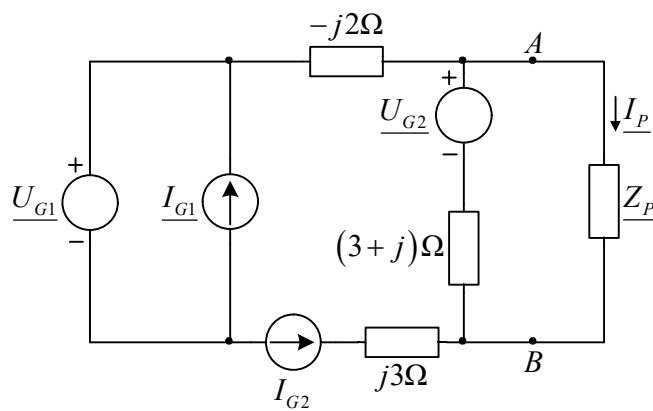
$$i_{G2}(t) = -\sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_{G2}(t) = -\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G2} = -1A \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_{G2} = -1A \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_{G2} = -1A \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1A \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_{G2} = j1A.$$

Na slici 2.23a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:

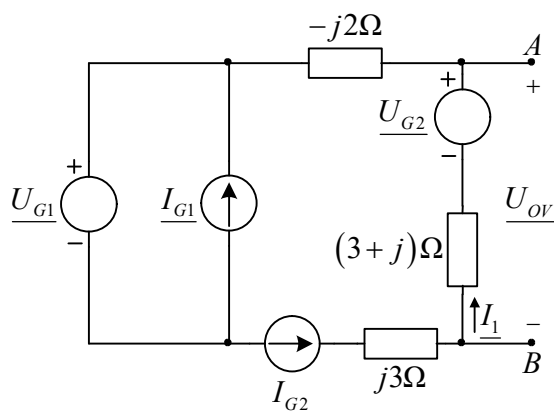
2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.23a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.23b:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$



Slika 2.23b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.23b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = -\underline{I}_1 \cdot (3+j)\Omega + \underline{U}_{G2} = -\underline{I}_1 \cdot (3+j)\Omega + j2V.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B je:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{G2} = j1A.$$

Zamenom izračunate vrednosti struje $\underline{I}_1$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

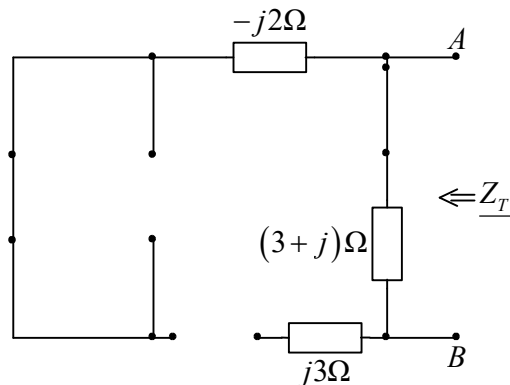
$$\underline{U}_{OV} = -j1A \cdot (3+j)\Omega + j2V = (1-j)V,$$

tako da je konačno:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = (1 - j) \text{ V}.$$

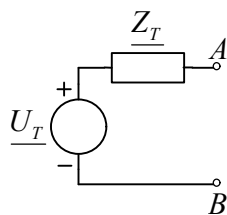
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.23c:



Slika 2.23c

$$\underline{Z}_T = (3 + j) \Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.23b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.23d:



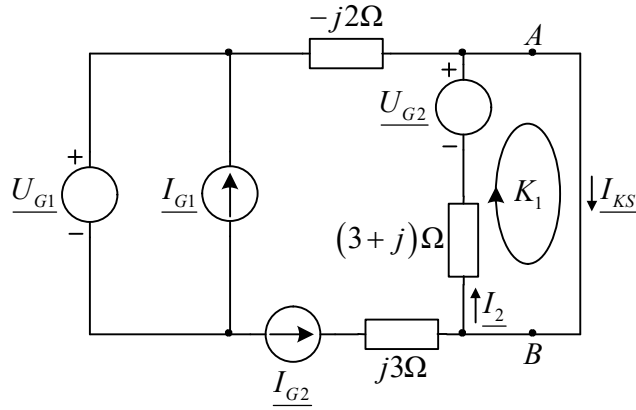
Slika 2.23d

b) Struja Nortonovog generatora $\underline{I}_N$ za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao struja kratkog spoja $\underline{I}_{KS}$ između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola i nakon što se te dve tačke kratko spoje:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{KS}.$$

Struja kratkog spoja se može odrediti pomoću šeme prikazane na slici 2.23e.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.23e

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B važi:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{G2} + \underline{I}_{KS} = j1\text{A} + \underline{I}_{KS}.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj je napon na impedansi vrednosti $(3+j)\Omega$ izražen preko Omovog zakona, glasi:

$$\underline{U}_{G2} - \underline{I}_2 \cdot (3+j)\Omega = 0.$$

Uvrštavanjem izvedenog izraza za struju $\underline{I}_2$ u prethodnu jednačinu, dobija se:

$$\underline{U}_{G2} - (j1\text{A} + \underline{I}_{KS}) \cdot (3+j)\Omega = 0 \Rightarrow \underline{I}_{KS} = \frac{\underline{U}_{G2}}{(3+j)\Omega} - j1\text{A},$$

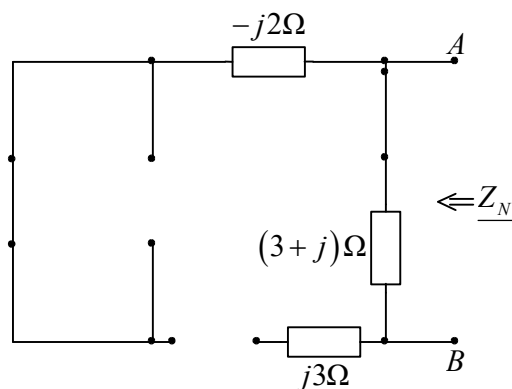
iz čega sledi:

$$\underline{I}_{KS} = \frac{j2\text{V}}{(3+j)\Omega} - j1\text{A} \Rightarrow \underline{I}_{KS} = \frac{1-j}{3+j}\text{A} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right)\text{A},$$

tako da je konačno:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{KS} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right)\text{A}.$$

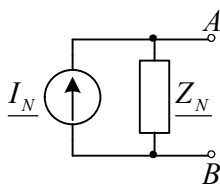
Impedansa Nortonovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.23f:



Slika 2.23f

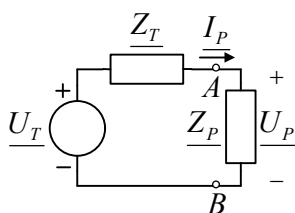
$$\underline{Z}_N = (3 + j)\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer struje kratkog spoja $\underline{I}_{KS}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.23e), može se zaključiti da će traženi Nortonov generator imati izgled prikazan na slici 2.23g:



Slika 2.23g

c) Korišćenjem rezultata iz tačke a), kolo sa slike 2.23a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.23h:



Slika 2.23h

Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.23h razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

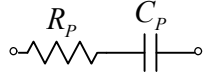
$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = (3 - j)\Omega.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Pošto se impedansa $\underline{Z}_P = (3 - j)\Omega$ sastoji od pozitivnog realnog dela i negativnog imaginarnog dela, ona se može realizovati kao redna veza otpornika otpornosti R_P i kondenzatora kapacitivnosti C_P , na način prikazan na slici 2.23i:



Slika 2.23i

U tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R_P + \frac{1}{j2\pi f C_P} = R_P - \frac{j}{2\pi f C_P} = 3\Omega - j1\Omega,$$

odakle se dobija da je:

$$R_P = 3\Omega,$$

kao i da je:

$$\frac{1}{2\pi f C_P} = 1\Omega \Rightarrow C_P = \frac{1}{2\pi f \cdot 1\Omega} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 1\Omega} \Rightarrow C_P = 3.183\mu\text{F}.$$

d) Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.23h, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{(1 - j)\text{V}}{(3 + j)\Omega + (3 - j)\Omega} = \left(\frac{1}{6} - j\frac{1}{6}\right)\text{A}.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = (3 - j)\Omega \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} \text{A} \right)^2 = \left(\frac{1}{6} - j\frac{1}{18}\right)\text{VA},$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = \frac{1}{6} \text{W},$$

i reaktivna snaga:

$$Q_P = -\frac{1}{18} \text{Var}.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

e) Konverzijom struje $\underline{I}_P$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_P = \left(\frac{1}{6} - j\frac{1}{6} \right) \text{A} \rightarrow \underline{I}_P = \sqrt{\left(\frac{1}{6} \right)^2 + \left(-\frac{1}{6} \right)^2} \text{A} \cdot e^{j \arctg \frac{(-1/6)}{1/6}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{A} \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{I}_P = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{A} \angle -45^\circ \rightarrow i_P(t) = \frac{1}{3} \text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ),$$

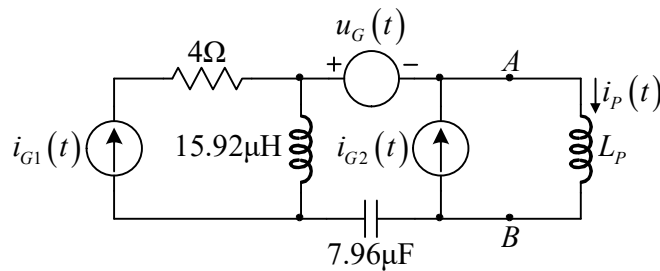
$$i_P(t) = \frac{1}{3} \text{A} \cdot \cos(100000\pi t - 45^\circ).$$

2.24. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.24 je poznato: $u_G(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $i_{G1}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_{G2}(t) = 2\text{A} \cdot \sin(2\pi ft - 45^\circ)$, $f = 20\text{kHz}$ i $L_P = 7.96\mu\text{H}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu koja se razvija na potrošaču induktivnosti L_P .

c) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti struju $i_P(t)$.



Slika 2.24

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.24 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 4\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 7.96\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot 7.96\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 7.96\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 15.92\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j2\pi f \cdot 15.92\mu\text{H} = j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 15.92\mu\text{H} = j2\Omega.$$

Impedansa potrošača induktivnosti L_P je:

$$\underline{Z}_P = j2\pi f \cdot 7.96\mu\text{H} = j2\pi \cdot 20\text{kHz} \cdot 7.96\mu\text{H} = j1\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ},$$

$$\underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_G = (1 + j)\text{V}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G1}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_{G1}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = -1\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = -1\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_{G1} = -1\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = j1\text{A}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G2}(t) = 2\text{A} \cdot \sin(2\pi ft - 45^\circ) = 2\text{A} \cdot \cos(90^\circ - (2\pi ft - 45^\circ)) = 2\text{A} \cdot \cos(135^\circ - 2\pi ft),$$

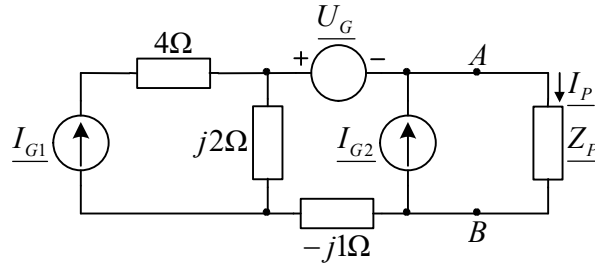
$$i_{G2}(t) = 2\text{A} \cdot \cos(135^\circ - 2\pi ft) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 135^\circ) = -2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ),$$

$$i_{G2}(t) = -2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G2} = -\sqrt{2}\text{A} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{I}_{G2} = -\sqrt{2}\text{A} \cdot e^{j45^\circ},$$

$$\underline{I}_{G2} = -\sqrt{2}\text{A} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_{G2} = (-1 - j)\text{A}.$$

Na slici 2.24a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:

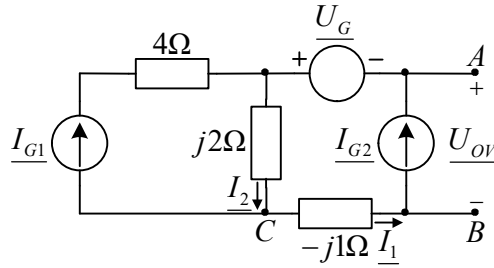
2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.24a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.24b:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$



Slika 2.24b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.24b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = \underline{I}_1 \cdot (-j1\Omega) + \underline{I}_2 \cdot j2\Omega - \underline{U}_G.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B važi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{G2} = (-1 - j) \text{ A},$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{G1} + \underline{I}_1 = j1\text{A} + (-1 - j)\text{A} = -1\text{A}.$$

Zamenom izračunatih vrednosti struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

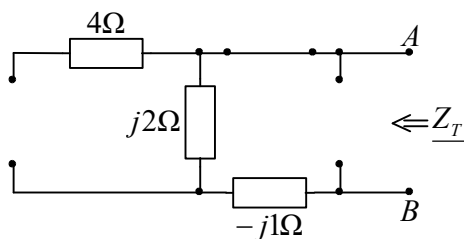
$$\underline{U}_{OV} = (-1 - j) \text{ A} \cdot (-j1\Omega) + (-1\text{A}) \cdot j2\Omega - (1 + j) \text{ V} = (-2 - j2) \text{ V},$$

tako da je konačno:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = (-2 - j2) \text{ V}.$$

Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.24c:

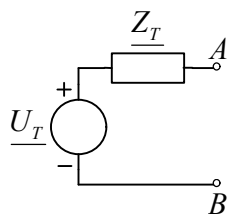
2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.24c

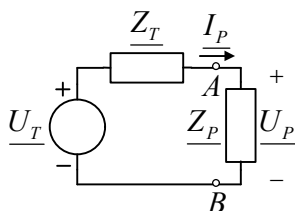
$$\underline{Z}_T = j2\Omega + (-j1\Omega) = j1\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.24b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.24d:



Slika 2.24d

b) Korišćenjem rezultata iz tačke a), kolo sa slike 2.24a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.24e:



Slika 2.24e

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.24e, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{(-2 - j2)\text{V}}{j1\Omega + j1\Omega} = \frac{-1 - j}{j}\text{A} = (-1 + j)\text{A}.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = j1\Omega \cdot \left(\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \text{ A} \right)^2 = (0 + j2) \text{ VA},$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = 0,$$

i reaktivna snaga:

$$Q_P = 2 \text{ VAr}.$$

c) Konverzijom struje $\underline{I}_P$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_P = (-1 + j) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_P = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} \text{ A} \cdot e^{j\left(180^\circ + \arctg\frac{1}{(-1)}\right)} = \sqrt{2} \text{ A} \cdot e^{j135^\circ},$$

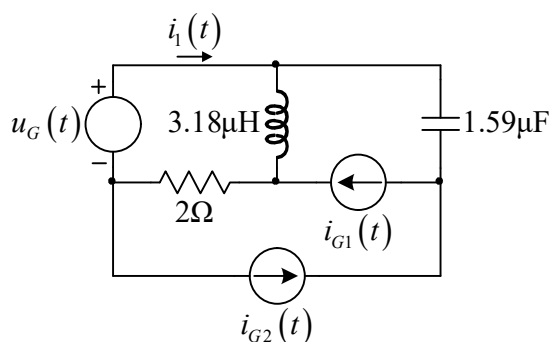
$$\underline{I}_P = \sqrt{2} \text{ A} \angle 135^\circ \rightarrow i_P(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft + 135^\circ),$$

$$i_P(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(40000\pi t + 135^\circ).$$

2.25. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.25 je poznato: $u_G(t) = 2 \text{ V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $i_{G1}(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ)$, $i_{G2}(t) = -\sqrt{2} \text{ A} \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 50 \text{ kHz}$.

a) Primenom metoda potencijala čvorova odrediti potencijale svih čvorova u kolu u kompleksnom domenu.

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a**), odrediti struju $i_1(t)$ u vremenskom domenu.



Slika 2.25

Rešenje:

Impedansa otpornika otpornosti $R = 2\Omega$ je:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_R = 2\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 1.59\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot 1.59\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 1.59\mu\text{F}} = -j2\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L = 3.18\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_L = j2\pi f \cdot 3.18\mu\text{H} = j2\pi \cdot 50\text{kHz} \cdot 3.18\mu\text{H} = j1\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$\begin{aligned} u_G(t) &= 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ}, \\ \underline{U}_G &= \sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = \sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_G = (1 + j)\text{V}. \end{aligned}$$

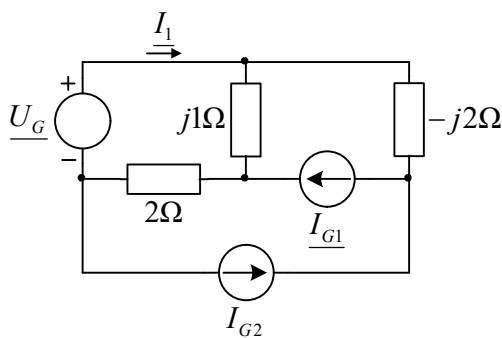
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$\begin{aligned} i_{G1}(t) &= 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \angle -45^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \cdot e^{-j45^\circ}, \\ \underline{I}_{G1} &= \sqrt{2}\text{A} \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = (1 - j)\text{A}. \end{aligned}$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

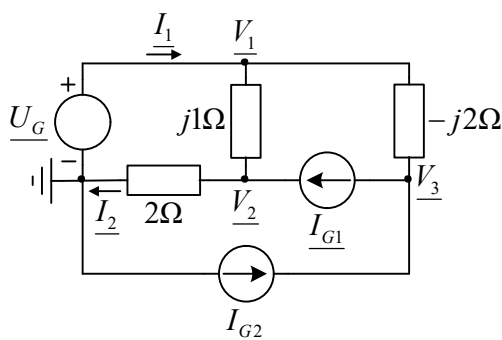
$$\begin{aligned} i_{G2}(t) &= -\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ), \\ i_{G2}(t) &= -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G2} = -1\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_{G2} = -1\text{A} \cdot e^{-j90^\circ}, \\ \underline{I}_{G2} &= -1\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_{G2} = j1\text{A}. \end{aligned}$$

Na slici 2.25a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.25a

a) S obzirom da u zadatom kolu postoji idealni naponski generator koji je direktno povezan između dva čvora (u pitanju je idealni naponski generator $\underline{U}_G$), referentni čvor se ne može proizvoljno izabrati, već se za referentni čvor mora izabrati jedan od priključaka pomenutog idealnog naponskog generatora $\underline{U}_G$.



Slika 2.25b

Ukoliko se referentni čvor izabere na način prikazan na slici 2.25b, i ukoliko se potencijali preostalih čvorova označe na način prikazan na slici 2.25b, po metodu potencijala čvorova se za zadato kolo može napisati sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{U}_G \\ \underline{Y}_{21}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{23}\underline{V}_3 &= \underline{I}^{(2)} \\ \underline{Y}_{31}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{32}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{33}\underline{V}_3 &= \underline{I}^{(3)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{U}_G \\ -\frac{1}{j1\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{j1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 - 0 \cdot \underline{V}_3 &= \underline{I}_{G1} \\ -\frac{1}{-j2\Omega} \cdot \underline{V}_1 - 0 \cdot \underline{V}_2 + \frac{1}{-j2\Omega} \cdot \underline{V}_3 &= -\underline{I}_{G1} + \underline{I}_{G2} \end{aligned} \right\}.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina se dobija:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (1+j)V \\ -\frac{1}{j1\Omega} \cdot \underline{V}_1 + \left(\frac{1}{j1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) \cdot \underline{V}_2 = (1-j)A \\ \frac{1}{j2\Omega} \cdot \underline{V}_1 - \frac{1}{j2\Omega} \cdot \underline{V}_3 = -(1-j)A + j1A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (1+j)V \\ -\frac{1}{j} \cdot \underline{V}_1 + \frac{2+j}{j2} \cdot \underline{V}_2 = (1-j)V \\ \frac{1}{j2} \cdot \underline{V}_1 - \frac{1}{j2} \cdot \underline{V}_3 = (-1+j2)V \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (1+j)V \\ -\frac{1}{j} \cdot (1+j)V + \frac{2+j}{j2} \cdot \underline{V}_2 = (1-j)V \\ \frac{1}{j2} \cdot (1+j)V - \frac{1}{j2} \cdot \underline{V}_3 = (-1+j2)V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (1+j)V \\ \frac{2+j}{j2} \cdot \underline{V}_2 = (1-j)V + (1-j)V \\ \underline{V}_3 = (4+j2)V + (1+j)V \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (1+j)V \\ \underline{V}_2 = \frac{4+j4}{2+j}V \\ \underline{V}_3 = (5+j3)V \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{V}_1 = (1+j)V \\ \underline{V}_2 = \left(\frac{12}{5} + j\frac{4}{5} \right)V \\ \underline{V}_3 = (5+j3)V \end{array} \right\}.$$

b) Struja $\underline{I}_2$ se može odrediti pomoću Omovog zakona za impedansu vrednosti 2Ω :

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2 - 0}{2\Omega} = \frac{1}{2\Omega} \cdot \left(\frac{12}{5} + j\frac{4}{5} \right)V = \left(\frac{6}{5} + j\frac{2}{5} \right)A.$$

Struja $\underline{I}_1$ se može izračunati primenom Kirhofovog zakona za struje za referentni čvor:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 - \underline{I}_{G2} = \left(\frac{6}{5} + j\frac{2}{5} \right)A - j1A = \left(\frac{6}{5} - j\frac{3}{5} \right)A.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_1$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_1 = \left(\frac{6}{5} - j\frac{3}{5} \right)A \rightarrow \underline{I}_1 = \sqrt{\left(\frac{6}{5} \right)^2 + \left(-\frac{3}{5} \right)^2} A \cdot e^{j \arctg \left(\frac{-3}{6} \right)} = \frac{3\sqrt{5}}{5} A \cdot e^{-j26.57^\circ},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{3\sqrt{5}}{5} A \angle -26.57^\circ \rightarrow i_1(t) = \frac{3\sqrt{10}}{5} A \cdot \cos(2\pi ft - 26.57^\circ),$$

$$i_1(t) = \frac{3\sqrt{10}}{5} A \cdot \cos(100000\pi t - 26.57^\circ).$$

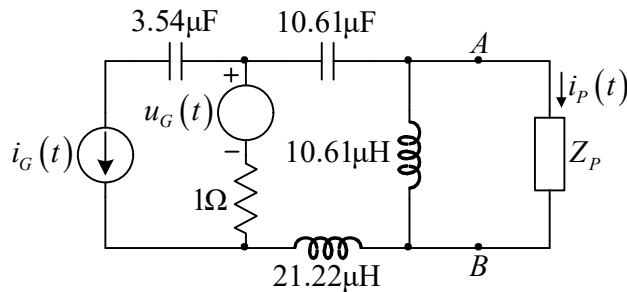
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

2.26. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.26 je poznato: $u_G(t) = -2V \cdot \cos(2\pi ft + 135^\circ)$, $i_G(t) = \sqrt{2}A \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 15\text{kHz}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti kompleksnu, aktivnu i reaktivnu snagu koja se razvija na potrošaču Z_P , ako je impedansa potrošača $\underline{Z}_P = (0.8 + j0.4)\Omega$. Odrediti i struju $i_P(t)$ u tom slučaju.

c) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti impedansu $\underline{Z}_P$ potrošača, tako da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga. Realizovati dobijenu vrednost impedanse $\underline{Z}_P$ potrošača pomoću minimalnog potrebnog broja proizvoljnih komponenti (otpornika, kalemova, kondenzatora) i odrediti njihove vrednosti.



Slika 2.26

Rešenje:

Impedansa otpornika iz dela kola sa slike 2.26 levo od tačaka A i B je:

$$\underline{Z}_R = 1\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 3.54\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 3.54\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 15\text{kHz} \cdot 3.54\mu\text{F}} = -j3\Omega,$$

impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_2 = 10.61\mu\text{F}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 10.61\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 15\text{kHz} \cdot 10.61\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

impedansa kalema induktivnosti $L_1 = 21.22\mu\text{H}$ je:

$$\underline{Z}_{L_1} = j2\pi f \cdot 21.22\mu\text{H} = j2\pi \cdot 15\text{kHz} \cdot 21.22\mu\text{H} = j2\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L_2 = 10.61\mu\text{H}$:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_{L_2} = j2\pi f \cdot 10.61\mu\text{H} = j2\pi \cdot 15\text{kHz} \cdot 10.61\mu\text{H} = j1\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = -2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 135^\circ) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ),$$

$$u_G(t) = 2\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \angle -45^\circ \rightarrow \underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{U}_G = \sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_G = (1 - j)\text{V}.$$

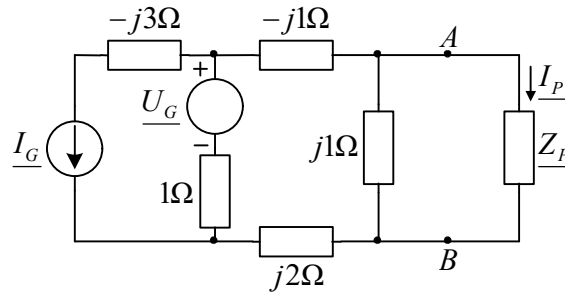
Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_G(t) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_G(t) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_G = 1\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_G = 1\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_G = 1\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = 1\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_G = -j1\text{A}.$$

Na slici 2.26a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:

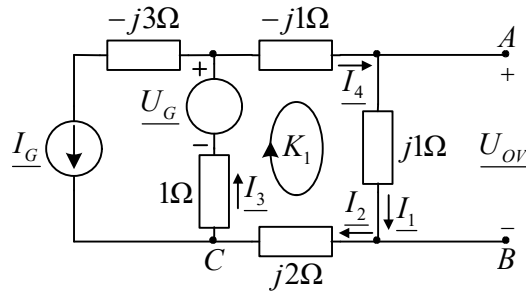


Slika 2.26a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.26b:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV}.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.26b

Napon $\underline{U}_{OV}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.26b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U}_{OV} = \underline{I}_1 \cdot j1\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_1,$$

na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B važi:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1,$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_G + \underline{I}_2 = \underline{I}_G + \underline{I}_1 = -j1\text{A} + \underline{I}_1.$$

Jednačina po Kirhofovom zakonu za napone za konturu K_1 (za smer obilaska konture označen na slici), u kojoj su naponi na impedansama vrednosti 1Ω , $-j1\Omega$, $j1\Omega$ i $j2\Omega$ izraženi preko Omovog zakona, glasi:

$$\underline{U}_G - \underline{I}_4 \cdot (-j1\Omega) - \underline{I}_1 \cdot j1\Omega - \underline{I}_2 \cdot j2\Omega - \underline{I}_3 \cdot 1\Omega = 0.$$

Uvrštavanjem izvedenih izraza za struje $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ i $\underline{I}_4$ u prethodnu jednačinu, dobija se:

$$\underline{U}_G - \underline{I}_1 \cdot (-j1\Omega) - \underline{I}_1 \cdot j1\Omega - \underline{I}_1 \cdot j2\Omega - (-j1\text{A} + \underline{I}_1) \cdot 1\Omega = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_G + j1\text{V}}{(1 + j2)\Omega},$$

tako da je:

$$\underline{I}_1 = \frac{(1-j)\text{V} + j1\text{V}}{(1+j2)\Omega} = \frac{1}{1+j2}\text{A} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right)\text{A}.$$

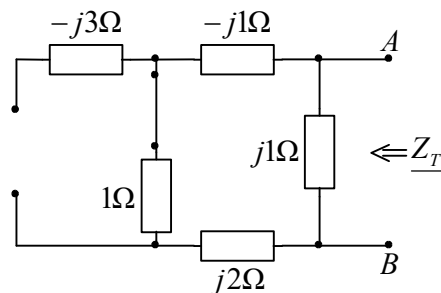
Zamenom izračunate vrednosti struje $\underline{I}_1$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

$$\underline{U}_{OV} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right)\text{A} \cdot j1\Omega = \left(\frac{2}{5} + j\frac{1}{5}\right)\text{V},$$

tako da je konačno:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{ov} = \left(\frac{2}{5} + j\frac{1}{5} \right) \text{V}.$$

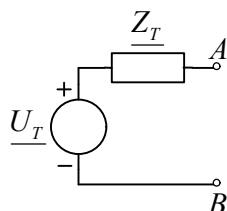
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.26c:



Slika 2.26c

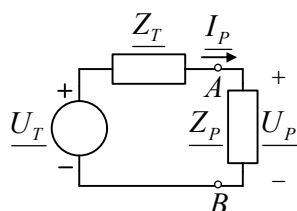
$$\underline{Z}_T = (j2\Omega + 1\Omega + (-j1\Omega)) \parallel j1\Omega = \frac{(1+j) \cdot j}{(1+j) + j} \Omega = \frac{-1+j}{1+j2} \Omega = \left(\frac{1}{5} + j\frac{3}{5} \right) \Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{ov}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.26b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.26d:



Slika 2.26d

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, kolo sa slike 2.26a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.26e:



Slika 2.26e

Po uslovu ove tačke zadatka, impedansa potrošača je $\underline{Z}_P = (0.8 + j0.4) \Omega$.

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Struja $\underline{I}_P$, označena na slici 2.26e, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_T$ i $\underline{Z}_P$:

$$\underline{I}_P = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T + \underline{Z}_P} = \frac{(0.4 + j0.2) \text{ V}}{(0.2 + j0.6) \Omega + (0.8 + j0.4) \Omega} = \frac{0.4 + j0.2}{1 + j} \text{ A} = (0.3 - j0.1) \text{ A}.$$

Kompleksna snaga koja se razvija na potrošaču $\underline{Z}_P$ (tj. koju potrošač $\underline{Z}_P$ prima) se može odrediti na sledeći način:

$$\underline{S}_P = \underline{U}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot \underline{I}_P \cdot \underline{I}_P^* = \underline{Z}_P \cdot |\underline{I}_P|^2 = (0.8 + j0.4) \Omega \cdot \left(\sqrt{0.3^2 + (-0.1)^2} \text{ A} \right)^2,$$

$$\underline{S}_P = (0.08 + j0.04) \text{ VA},$$

što znači da se na potrošaču $\underline{Z}_P$ razvija aktivna snaga:

$$P_P = 0.08 \text{ W},$$

i reaktivna snaga:

$$Q_P = 0.04 \text{ VAR}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_P$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_P = (0.3 - j0.1) \text{ A} \rightarrow \underline{I}_P = \sqrt{0.3^2 + (-0.1)^2} \text{ A} \cdot e^{j \arctg \frac{(-0.1)}{0.3}} = \sqrt{0.1} \text{ A} \cdot e^{-j18.43^\circ},$$

$$\underline{I}_P = \sqrt{0.1} \text{ A} \angle -18.43^\circ \rightarrow i_P(t) = \sqrt{0.2} \text{ A} \cdot \cos(2\pi ft - 18.43^\circ),$$

$$i_P(t) = \sqrt{0.2} \text{ A} \cdot \cos(30000\pi t - 18.43^\circ).$$

c) Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.26e razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

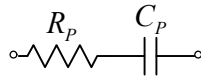
$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_T^* = \left(\frac{1}{5} - j\frac{3}{5} \right) \Omega = (0.2 - j0.6) \Omega.$$

Pošto se impedansa $\underline{Z}_P = (0.2 - j0.6) \Omega$ sastoji od pozitivnog realnog dela i negativnog imaginarnog dela, ona se može realizovati kao redna veza otpornika otpornosti R_P i kondenzatora kapacitivnosti C_P , na način prikazan na slici 2.26f:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.26f

U tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R_P + \frac{1}{j2\pi f C_P} = R_P - \frac{j}{2\pi f C_P} = 0.2\Omega - j0.6\Omega,$$

odakle se dobija da je:

$$R_P = 0.2\Omega,$$

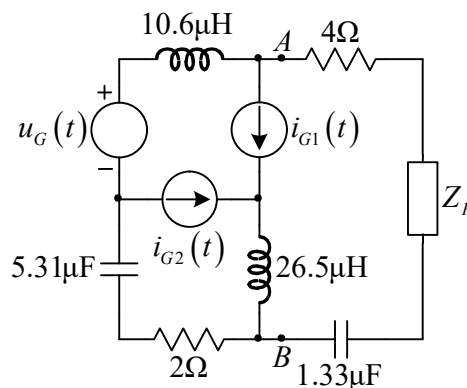
kao i da je:

$$\frac{1}{2\pi f C_P} = 0.6\Omega \Rightarrow C_P = \frac{1}{2\pi f \cdot 0.6\Omega} = \frac{1}{2\pi \cdot 15\text{kHz} \cdot 0.6\Omega} \Rightarrow C_P = 17.68\mu\text{F}.$$

2.27. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.27 je poznato: $u_G(t) = 10\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ)$, $i_{G1}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_{G2}(t) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft)$ i $f = 30\text{kHz}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti impedansu $\underline{Z}_P$ potrošača, tako da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga. Realizovati dobijenu vrednost impedanse $\underline{Z}_P$ potrošača pomoću minimalnog potrebnog broja proizvoljnih komponenti (otpornika, kalemova, kondenzatora) i odrediti njihove vrednosti.



Slika 2.27

Rešenje:

Impedansa otpornika otpornosti $R_1 = 2\Omega$ iznosi:

$$\underline{Z}_{R_1} = 2\Omega,$$

dok je impedansa otpornika otpornosti $R_2 = 4\Omega$:

$$\underline{Z}_{R_2} = 4\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = 5.31\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 5.31\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 5.31\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C_2 = 1.33\mu\text{F}$ iznosi:

$$\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{j2\pi f \cdot 1.33\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 1.33\mu\text{F}} = -j4\Omega,$$

impedansa kalema induktivnosti $L_1 = 26.5\mu\text{H}$ je:

$$\underline{Z}_{L_1} = j2\pi f \cdot 26.5\mu\text{H} = j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 26.5\mu\text{H} = j5\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L_2 = 10.6\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_{L_2} = j2\pi f \cdot 10.6\mu\text{H} = j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 10.6\mu\text{H} = j2\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = 10\text{V} \cdot \cos(2\pi ft + 45^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V} \angle 45^\circ \rightarrow \underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V} \cdot e^{j45^\circ},$$

$$\underline{U}_G = 5\sqrt{2}\text{V} \cdot (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 5\sqrt{2}\text{V} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{U}_G = (5 + j5)\text{V}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G1}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$i_{G1}(t) = -\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = -1\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = -1\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_{G1} = -1\text{A} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1\text{A} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = j1\text{A}.$$

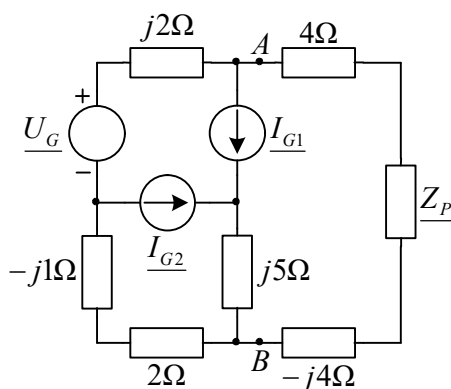
2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G2}(t) = 2\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft) \rightarrow \underline{I_{G2}} = 2A \angle 0^\circ \rightarrow \underline{I_{G2}} = 2A \cdot e^{j0^\circ},$$

$$\underline{I_{G2}} = 2A \cdot (\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ) = 2A \cdot (1 + j0) \Rightarrow \underline{I_{G2}} = 2A.$$

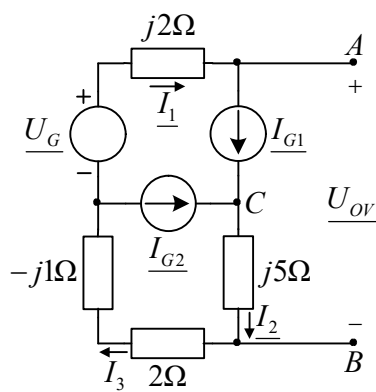
Na slici 2.27a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.27a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.27b:

$$\underline{U_T} = \underline{U_{OV}}.$$



Slika 2.27b

Napon $\underline{U_{OV}}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.27b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U_{OV}} = -\underline{I_3} \cdot 2\Omega - \underline{I_3} \cdot (-j1\Omega) + \underline{U_G} - \underline{I_1} \cdot j2\Omega.$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{G1} = j1\text{A},$$

na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C važi:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{G1} + \underline{I}_{G2} = j1\text{A} + 2\text{A} = (2 + j)\text{A},$$

dok je na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku B :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_2 = (2 + j)\text{A}.$$

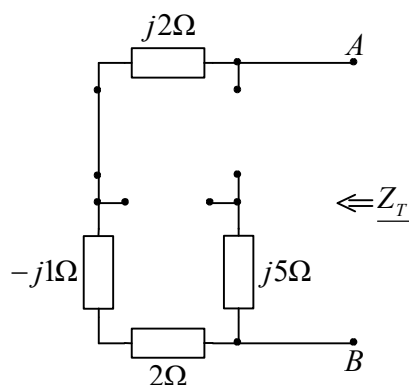
Zamenom izračunatih vrednosti struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_3$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

$$\underline{U}_{OV} = -(2 + j)\text{A} \cdot 2\Omega - (2 + j)\text{A} \cdot (-j1\Omega) + (5 + j5)\text{V} - j1\text{A} \cdot j2\Omega = (2 + j5)\text{V},$$

tako da je konačno:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = (2 + j5)\text{V}.$$

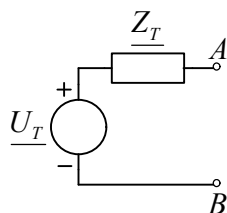
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.27c:



Slika 2.27c

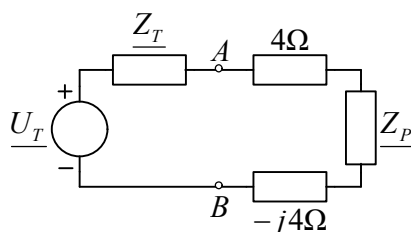
$$\underline{Z}_T = j2\Omega + (-j1\Omega) + 2\Omega = (2 + j)\Omega.$$

Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.27b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.27d:



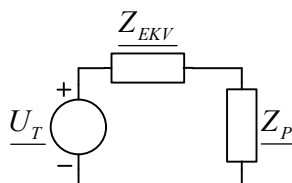
Slika 2.27d

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, kolo sa slike 2.27a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.27e:



Slika 2.27e

Kolo sa slike 2.27e se dalje može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.27f:



Slika 2.27f

gde je:

$$\underline{Z}_{EKV} = \underline{Z}_T + 4\Omega + (-j4\Omega) = (2 + j)\Omega + 4\Omega - j4\Omega = (6 - j3)\Omega.$$

Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.27f razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

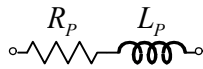
$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_{EKV}^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_{EKV}^* = (6 + j3)\Omega.$$

Pošto se impedansa $\underline{Z}_P = (6 + j3)\Omega$ sastoji od pozitivnog realnog dela i pozitivnog imaginarnog dela, ona se može realizovati kao redna veza otpornika otpornosti R_p i kalema induktivnosti L_p , na način prikazan na slici 2.27g:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.27g

U tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_p = R_p + j2\pi fL_p = 6\Omega + j3\Omega,$$

odakle se dobija da je:

$$R_p = 6\Omega,$$

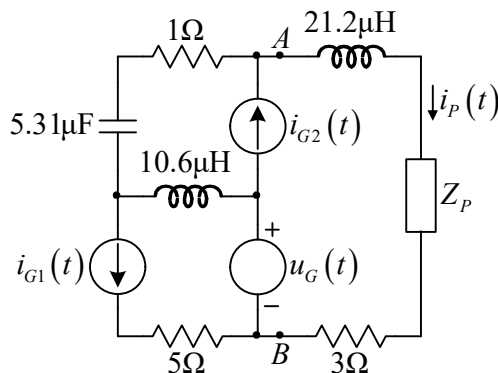
kao i da je:

$$2\pi fL_p = 3\Omega \Rightarrow L_p = \frac{3\Omega}{2\pi f} = \frac{3\Omega}{2\pi \cdot 30\text{kHz}} \Rightarrow L_p = 15.92\mu\text{H}.$$

2.28. Za kolo sa prostoperiodičnim strujama sa slike 2.28 je poznato: $u_G(t) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft)$, $i_{G1}(t) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ)$, $i_{G2}(t) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft)$ i $f = 30\text{kHz}$.

a) Odrediti ekvivalentni Tevenenov generator u kompleksnom domenu za deo kola levo od tačaka A i B .

b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, odrediti impedansu $\underline{Z}_p$ potrošača, tako da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga. Realizovati dobijenu vrednost impedanse $\underline{Z}_p$ potrošača pomoću minimalnog potrebnog broja proizvoljnih komponenti (otpornika, kalemova, kondenzatora) i odrediti njihove vrednosti. Odrediti i struju $i_p(t)$ u tom slučaju.



Slika 2.28

Rešenje:

Impedansa otpornika otpornosti $R_1 = 1\Omega$ iznosi:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$\underline{Z}_{R_1} = 1\Omega,$$

impedansa otpornika otpornosti $R_2 = 5\Omega$ je:

$$\underline{Z}_{R_2} = 5\Omega,$$

dok je impedansa otpornika otpornosti $R_3 = 3\Omega$:

$$\underline{Z}_{R_3} = 3\Omega.$$

Impedansa kondenzatora kapacitivnosti $C = 5.31\mu\text{F}$ se može izračunati na sledeći način:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j2\pi f \cdot 5.31\mu\text{F}} = \frac{1}{j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 5.31\mu\text{F}} = -j1\Omega,$$

impedansa kalema induktivnosti $L_1 = 21.2\mu\text{H}$ je:

$$\underline{Z}_{L_1} = j2\pi f \cdot 21.2\mu\text{H} = j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 21.2\mu\text{H} = j4\Omega,$$

dok je impedansa kalema induktivnosti $L_2 = 10.6\mu\text{H}$:

$$\underline{Z}_{L_2} = j2\pi f \cdot 10.6\mu\text{H} = j2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 10.6\mu\text{H} = j2\Omega.$$

Konverzijom napona idealnog naponskog generatora $u_G(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$u_G(t) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \sin(2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

$$u_G(t) = -\sqrt{2}\text{V} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{U}_G = -1\text{V} \angle -90^\circ \rightarrow \underline{U}_G = -1\text{V} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{U}_G = -1\text{V} \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = -1\text{V} \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{U}_G = j1\text{V}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G1}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

$$i_{G1}(t) = 2\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 45^\circ) \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \angle -45^\circ \rightarrow \underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \cdot e^{-j45^\circ},$$

$$\underline{I}_{G1} = \sqrt{2}\text{A} \cdot (\cos(-45^\circ) + j \sin(-45^\circ)) = \sqrt{2}\text{A} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow \underline{I}_{G1} = (1 - j)\text{A}.$$

Konverzijom struje idealnog strujnog generatora $i_{G2}(t)$ iz vremenskog domena u kompleksni domen, dobija se:

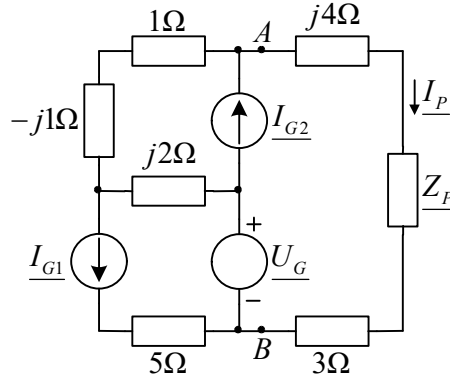
$$i_{G2}(t) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(90^\circ - 2\pi ft) = 2\sqrt{2}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ),$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$i_{G2}(t) = 2\sqrt{2}A \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) \rightarrow \underline{I_{G2}} = 2A \angle -90^\circ \rightarrow \underline{I_{G2}} = 2A \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I_{G2}} = 2A \cdot (\cos(-90^\circ) + j \sin(-90^\circ)) = 2A \cdot (0 - j1) \Rightarrow \underline{I_{G2}} = -j2A.$$

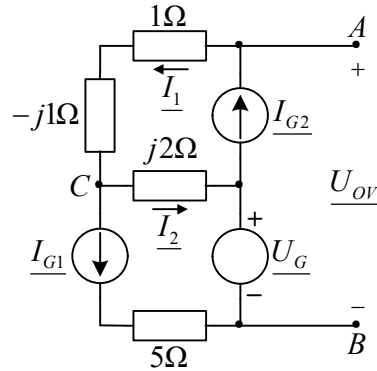
Na slici 2.28a je dat prikaz kola iz postavke zadatka u kome su svi parametri kola predstavljeni u kompleksnom domenu:



Slika 2.28a

a) Napon Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B se određuje kao napon otvorene veze između tačaka A i B , nakon što se deo kola levo od tačaka A i B izdvoji iz ostatka kola, na način prikazan na šemi sa slike 2.28b:

$$\underline{U_T} = \underline{U_{OV}}.$$



Slika 2.28b

Napon $\underline{U_{OV}}$ se, na osnovu kola prikazanog na slici 2.28b, može odrediti na sledeći način:

$$\underline{U_{OV}} = \underline{U_G} + \underline{I_2} \cdot j2\Omega + \underline{I_1} \cdot (1-j)\Omega.$$

Na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku A je:

$$\underline{I_1} = \underline{I_{G2}} = -j2A,$$

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

dok na osnovu Kirhofovog zakona za struje za čvor C važi:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 - \underline{I}_{G1} = -j2\text{A} - (1-j)\text{A} = (-1-j)\text{A}.$$

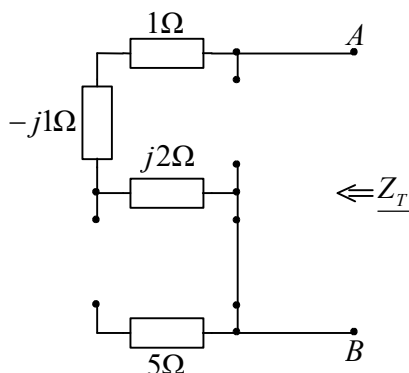
Zamenom izračunatih vrednosti struja $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ u izraz za napon $\underline{U}_{OV}$, dobija se:

$$\underline{U}_{OV} = j1\text{V} + (-1-j)\text{A} \cdot j2\Omega + (-j2\text{A}) \cdot (1-j)\Omega = -3j\text{V},$$

tako da je konačno:

$$\underline{U}_T = \underline{U}_{OV} = -j3\text{V}.$$

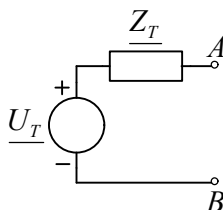
Impedansa Tevenenovog generatora se određuje na osnovu šeme sa slike 2.28c:



Slika 2.28c

$$\underline{Z}_T = 1\Omega + (-j1\Omega) + j2\Omega = (1+j)\Omega.$$

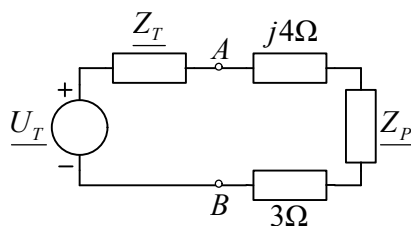
Imajući u vidu referentni smer napona otvorene veze $\underline{U}_{OV}$ (proizvoljno usvojen na način prikazan na slici 2.28b), može se zaključiti da će traženi Tevenenov generator imati izgled prikazan na slici 2.28d:



Slika 2.28d

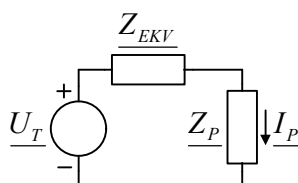
b) Korišćenjem rezultata iz tačke **a)**, kolo sa slike 2.28a se može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.28e:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja



Slika 2.28e

Kolo sa slike 2.28e se dalje može ekvivalentirati kolom prikazanim na slici 2.28f:



Slika 2.28f

gde je:

$$\underline{Z}_{EKV} = \underline{Z}_T + j4\Omega + 3\Omega = (1 + j)\Omega + j4\Omega + 3\Omega = (4 + j5)\Omega.$$

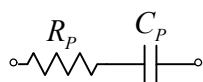
Da bi se na potrošaču čija je impedansa $\underline{Z}_P$ u kolu sa slike 2.28f razvijala maksimalna aktivna snaga, neophodno je da bude zadovoljen sledeći uslov:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_{EKV}^*,$$

tako da treba da bude:

$$\underline{Z}_P = \underline{Z}_{EKV}^* = (4 - j5)\Omega.$$

Pošto se impedansa $\underline{Z}_P = (4 - j5)\Omega$ sastoji od pozitivnog realnog dela i negativnog imaginarnog dela, ona se može realizovati kao redna veza otpornika otpornosti R_p i kondenzatora kapacitivnosti C_p , na način prikazan na slici 2.28g:



Slika 2.28g

U tom slučaju mora da važi:

$$\underline{Z}_P = R_p + \frac{1}{j2\pi fC_p} = R_p - \frac{j}{2\pi fC_p} = 4\Omega - j5\Omega,$$

odakle se dobija da je:

2. Električna kola prostoperiodičnih struja

$$R_p = 4\Omega,$$

kao i da je:

$$\frac{1}{2\pi f C_p} = 5\Omega \Rightarrow C_p = \frac{1}{2\pi f \cdot 5\Omega} = \frac{1}{2\pi \cdot 30\text{kHz} \cdot 5\Omega} \Rightarrow C_p = 1.06\mu\text{F}.$$

Struja $\underline{I}_p$, označena na slici 2.28f, se može izračunati pomoću Omovog zakona za rednu vezu impedansi $\underline{Z}_{EKV}$ i $\underline{Z}_p$:

$$\underline{I}_p = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_{EKV} + \underline{Z}_p} = \frac{-j3\text{V}}{(4 + j5)\Omega + (4 - j5)\Omega} = -j\frac{3}{8}\text{A}.$$

Konverzijom struje $\underline{I}_p$ iz kompleksnog domena u vremenski domen, dobija se:

$$\underline{I}_p = -j\frac{3}{8}\text{A} \rightarrow \underline{I}_p = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{3}{8}\right)^2} \text{A} \cdot e^{j\arctg\left(\frac{-3}{8}\right)} = \frac{3}{8}\text{A} \cdot e^{-j90^\circ},$$

$$\underline{I}_p = \frac{3}{8}\text{A} \angle -90^\circ \rightarrow i_p(t) = \frac{3\sqrt{2}}{8}\text{A} \cdot \cos(2\pi ft - 90^\circ) = \frac{3\sqrt{2}}{8}\text{A} \cdot \sin(2\pi ft),$$

$$i_p(t) = \frac{3\sqrt{2}}{8}\text{A} \cdot \sin(60000\pi t).$$

LITERATURA

B. Popović, *Osnovi elektrotehnike 1*, Građevinska knjiga, Beograd, 1976.

B. Popović, *Osnovi elektrotehnike 2*, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.

A. Đorđević, G. Božilović i B. Notaroš, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike, I deo*, Akademska misao, Beograd, 1997.

A. Đorđević, G. Božilović i B. Notaroš, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike, II deo*, Akademska misao, Beograd, 1997.

A. Đorđević, *Osnovi elektrotehnike 2. deo (Stalne struje)*, Akademska misao, Beograd, 2016.

A. Đorđević, *Osnovi elektrotehnike 4. deo (Kola promenljivih struja)*, Akademska misao, Beograd, 2016.